

疑似ザルガラー多面体の計算について

中山 洋将* 山本 侑理

東海大学 理系教育センター

(Received September 14, 2023 Accepted November 10, 2023)

概 要

Zalgaller polyhedron is a polyhedron whose faces are regular polygons. Sekiguchi has computed the vertices of Zalgaller polyhedrons and quasi Zalgaller polyhedrons by using algebraic method. Under few assumptions about vertices, we solve a system of equations of vertices and obtain new quasi Zalgaller polyhedrons.

1 Introduction

各面が正多角形である多面体はザルガラー多面体と呼ばれ、無限個ある正多角柱、正多角反柱を除くと、92種類のみ存在することが知られている [3]. 関口氏は、その頂点の座標の満たす連立方程式を立て、それを解くことでザルガラー多面体とその星形化に相当する疑似ザルガラー多面体の頂点の座標を計算している [2]. 本稿では、その計算において仮定している条件式を極力減らして、連立方程式を解くことにより、新たな疑似ザルガラー多面体のいくつかを見つけることができたことを説明する.

2 ザルガラー多面体、疑似ザルガラー多面体の計算

[2] に従い、疑似ザルガラー多面体とその計算方法を説明する.

定義 1 (ザルガラー多面体, [3])

各面が正多角形である凸多面体をザルガラー多面体という.

無限個ある正多角柱、正多角反柱を除くと、ザルガラー多面体は92種類のみ存在することが知られている [3]. [1] では、ザルガラー多面体の頂点を計算するアルゴリズムと各多面体の頂点のデータ (近似値) が与えられている. 関口氏はザルガラー多面体と疑似ザルガラー多面体の頂点を代数的方法により計算を行っている [2]. 具体的には、次のような方法である.

アルゴリズム 2 (ザルガラー多面体の頂点の計算, [2])

ザルガラー多面体の頂点を $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ とし、 x_i, y_i, z_i は未知数とする.

*nakayama@tokai-u.jp

1. ザルガラー多面体のグラフ (点, 辺, 面の組合せ構造) を考える.
2. 各面の頂点 P_i の座標 (x_i, y_i, z_i) について, 次の条件から連立代数方程式を立てる.
 - 辺 P_iP_j と辺 P_kP_l の長さが等しい $\iff (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2$
 - $\angle P_iP_jP_k = \angle P_jP_kP_l \iff P_iP_k = P_jP_l$
 - 点 P_i, P_j, P_k, P_l が同一平面上にある $\iff \det \begin{pmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \\ x_j & y_j & z_j & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \\ x_l & y_l & z_l & 1 \end{pmatrix} = 0$
3. グレブナー基底を用いて得られた連立代数方程式を解く. 得られた実数解 (x_i, y_i, z_i) から多面体を作り, 各面が正多角形で面の交差がなく, 凸性を満たすものをとれば, それがザルガラー多面体の頂点となる.

3. で解いた連立代数方程式の実数解を頂点とするものが疑似ザルガラー多面体と定義される. ザルガラー多面体の定義から, 面の星形化や交差を許し, 凸性の条件を除き一般化したものと考えられる.

定義 3 (疑似ザルガラー多面体, [2])

元のザルガラー多面体と同じ頂点, 辺, 面の組み合わせ構造を持ち, 各面が正多角形または星形正多角形である多面体を疑似ザルガラー多面体という.

以下では [2] に従い, 疑似ザルガラー多面体の計算を行う. 頂点の添字などの設定もそれに従う.

3 ザルガラー多面体 M_8 とその疑似ザルガラー多面体の計算

ザルガラー多面体 M_8 は, 頂点 14 個, 面 14 枚 (正 3 角形 8 枚, 正 4 角形 2 枚, 正 5 角形 4 枚) を持ち, 各面は

正 3 角形 $P_1P_2P_{13}, P_5P_6P_{13}, P_9P_{10}P_{14}, P_{11}P_{12}P_{14}, P_1P_8P_9, P_2P_3P_{10}, P_6P_7P_{12}, P_4P_5P_{11}$

正 4 角形 $P_1P_2P_{10}P_9, P_5P_6P_{12}P_{11}$

正 5 角形 $P_1P_8P_7P_6P_{13}, P_2P_3P_4P_5P_{13}, P_9P_8P_7P_{12}P_{14}, P_{10}P_3P_4P_{11}P_{14}$

となる. 多面体のグラフは図 1 になる.

この情報から連立代数方程式を立てると, 変数 42 個, 方程式 80 本の連立代数方程式が得られ

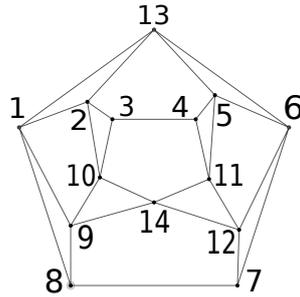


図 1: M_8 のグラフ

る. [2, 7.1 節] では, ザルガラー多面体の対称性などから得られる頂点の条件式 [2, p.80, (7.1) 式]

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -x_2 = x_9 = -x_{10} = -1, \\
 y_1 &= y_2 = y_9 = y_{10} = -y_5 = -y_6 = -y_{11} = -y_{12}, \\
 z_1 &= z_2 = -z_9 = -z_{10}, \quad x_5 = -x_6 = x_{11} = -x_{12} = 1, \\
 z_5 &= z_6 = -z_{11} = -z_{12} = 1, \quad y_3 = -y_4 = -y_7 = y_8 = -1, \\
 z_3 &= z_4 = z_7 = z_8 = 0, \quad x_3 = x_4 = -x_7 = -x_8, \\
 x_{13} &= x_{14} = y_{13} = y_{14} = 0, \quad z_{13} = -z_{14}
 \end{aligned} \tag{1}$$

を代入し, 変数 4 個, 方程式 60 本の連立代数方程式を作っている. そのグレブナー基底は,

$$z_{14}^2 + z_{14} - 1, x_8 - z_{14} + 1, z_{10} + 1, y_{12} + z_{14}$$

となり, 2 個の実数解が得られる. これから 1 つのザルガラー多面体と 1 つの疑似ザルガラー多面体が得ている.

条件式 (1) をなるべく減らして連立代数方程式を解き, 見つかっていない疑似ザルガラー多面体があるかどうかを調べる. 条件式 (1) の代わりに, 次のように頂点の条件式を立てる. 正 4 角形の頂点 P_5, P_6, P_{12}, P_{11} を xy 平面の $(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0)$ に配置し, この面に隣接する面 (正 3 角形) の頂点についての明らかな条件 $x_{13} = 0, x_{14} = 0, y_4 = 0, y_7 = 0$ を立てる. この条件は, 頂点 P_{13}, P_{14} が y 軸上にあり, P_4, P_7 が x 軸上にあることを意味する (図 2). 式としては

$$\begin{aligned}
 x_5 &= 1, y_5 = 1, z_5 = 0, x_6 = -1, y_6 = 1, z_6 = 0, x_{12} = -1, y_{12} = -1, z_{12} = 0, \\
 x_{11} &= 1, y_{11} = -1, z_{11} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 0, y_4 = 0, y_7 = 0
 \end{aligned}$$

となる. これを一番最初に立てた変数 42 個, 方程式 80 本の連立代数方程式に代入すると, 変数が 25 個で, 80 本の連立代数方程式が得られる. これは有理数係数で全次数逆辞書順序でグレブナー基底を求めることができ (380 s 程度), 0 次元イデアルで解の個数は 12 個となる. さらにこれらはいずれも実数解になる. 回転で同じになるものを同一視すれば, [2] にはなかった 2 種

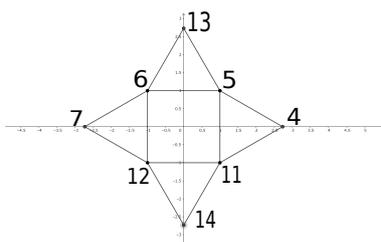


図 2: M_8 の頂点 P_5, P_6, P_{12}, P_{11} の xy 平面への配置

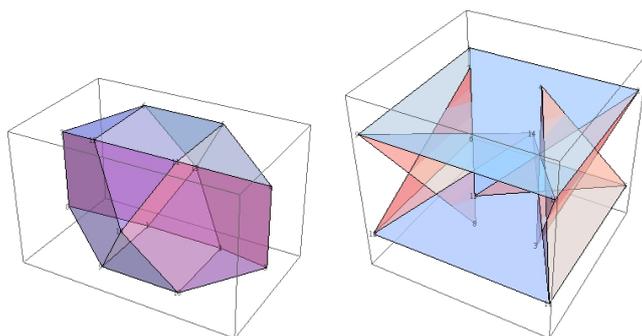


図 3: M_8 の既知の疑似ザルガラー多面体 (左はザルガラー多面体 M_8 自身)

類の疑似ザルガラー多面体を得られる。既知の疑似ザルガラー多面体では、2枚の正4角形の面が平行であるが、新たに見つかった疑似ザルガラー多面体では、2枚の正4角形の面が平行でないことが確認できる(図3, 図4)。これは条件式(1)では、2枚の正4角形を平行であると仮定していることによる。この M_8 の計算では、一番少ない仮定の下で疑似ザルガラー多面体の計算を行っているので、これにより M_8 の全ての疑似ザルガラー多面体が見つかったことになる。

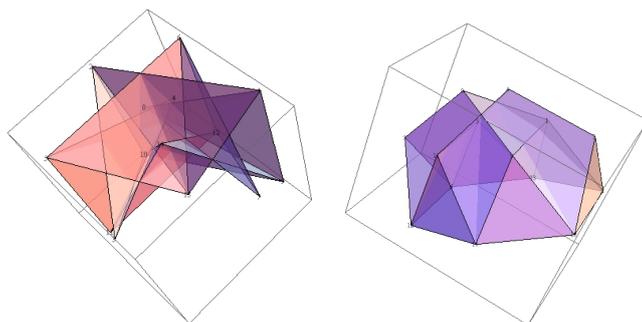
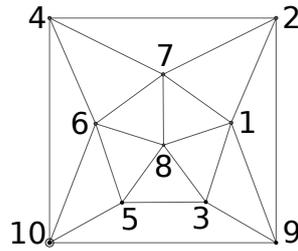


図 4: M_8 の新たな疑似ザルガラー多面体

図 5: M_{22} のグラフ

4 ザルガラー多面体 M_{22} とその疑似ザルガラー多面体の計算

ザルガラー多面体 M_{22} は、頂点 10 個、面 14 枚 (正 3 角形 12 枚, 正 4 角形 2 枚) を持ち、各面は

$$\begin{aligned} \text{正 3 角形 } & P_1P_2P_7, P_1P_2P_9, P_1P_7P_8, P_1P_3P_8, P_1P_3P_9, P_2P_4P_7, P_3P_5P_8, P_4P_6P_7, \\ & P_4P_6P_{10}, P_5P_6P_8, P_5P_6P_{10}, P_6P_7P_8 \\ \text{正 4 角形 } & P_2P_4P_{10}P_9, P_3P_5P_{10}P_9 \end{aligned}$$

となる。多面体のグラフは図 5 となる。[2] では、この情報から連立代数方程式 (変数 30 個, 方程式 48 本) を立てて、[2, p.94] の条件式

$$\begin{aligned} y_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, y_3 = -y_2, z_3 = -z_2, x_4 = -1, y_4 = y_2, z_4 = -z_2, x_5 = -1, y_5 = -y_2, \\ z_5 = -z_2, x_6 = -x_1, y_6 = 0, z_6 = z_1, x_7 = 0, y_7 = 1, x_8 = 0, y_8 = -1, z_8 = z_7, x_9 = 1, y_9 = 0, \\ z_9 = -z_7, x_{10} = -1, y_{10} = 0, z_{10} = -z_7 \end{aligned} \quad (2)$$

を代入し、変数 5 個、方程式 36 本の連立代数方程式を解いて 16 個の解を得ている。この内、実数解は 8 個であり、そこから疑似ザルガラー多面体が 4 個得られることがわかっている。

条件式 (2) をなるべく減らして連立代数方程式を解き、見つからない疑似ザルガラー多面体があるかどうかを調べる。正 4 角形の頂点 P_2, P_4, P_{10}, P_9 を xy 平面の $(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0)$ に配置し、この面に隣接する面の頂点についての明らかな条件

$$y_1 = 0, y_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_3 = 1, x_5 = -1$$

を追加する。この条件は、頂点 P_1, P_6 が x 軸上にあり、 P_7, P_8 が y 軸上にあり、頂点 P_3, P_5 の x 座標がそれぞれ 1, -1 であることを意味する (図 6)。式としては、

$$\begin{aligned} x_2 = 1, y_2 = 1, z_2 = 0, x_4 = -1, y_4 = 1, z_4 = 0, x_{10} = -1, y_{10} = -1, z_{10} = 0, \\ x_9 = 1, y_9 = -1, z_9 = 0, y_1 = 0, y_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_3 = 1, x_5 = -1 \end{aligned}$$

となる。これを一番最初に立てた連立代数方程式に代入すると、変数が 12 個で、38 本の連立代数方程式が得られる。これは有理数係数で全次数辞書式順序についてグレブナー基底を求めるこ

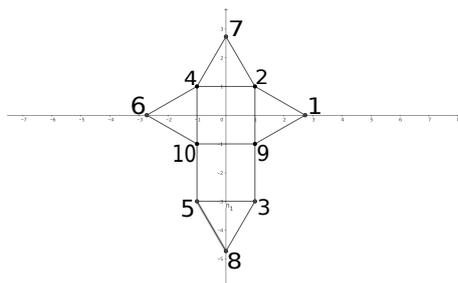


図 6: M_{22} の頂点 P_2, P_4, P_{10}, P_9 の xy 平面への配置

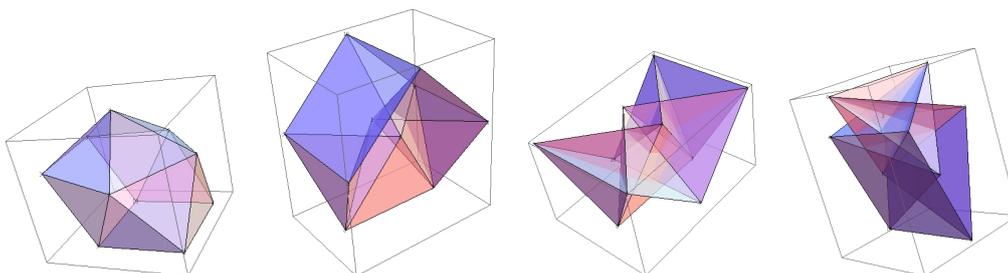


図 7: M_{22} の既知の疑似ザルガラー多面体 (一番左はザルガラー多面体 M_{22} 自身)

とができ (2 s 程度), 0 次元イデアルで解の個数は 36 個となる. このうち, 実数解は 20 個ある. こうして得られた疑似ザルガラー多面体で [2] にないものは 3 個ある. この計算では, 一番少ない仮定の下で疑似ザルガラー多面体の計算を行っているのので, これにより M_{22} の全ての疑似ザルガラー多面体が見つかったことになる.

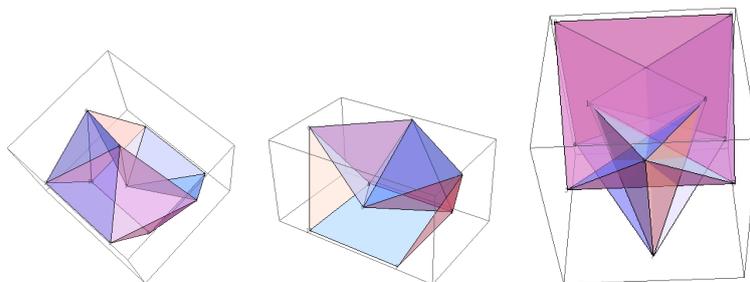


図 8: M_{22} の新たな疑似ザルガラー多面体

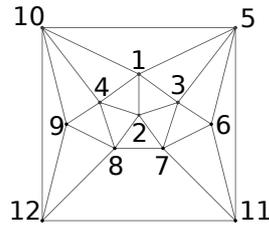


図 9: M_{23} のグラフ

5 ザルガラー多面体 M_{23} とその疑似ザルガラー多面体の計算

ザルガラー多面体 M_{23} は頂点 12 個, 面 14 枚 (正 3 角形 16 枚, 正 4 角形 2 枚) を持ち, 各面は

正 3 角形 $P_1P_2P_3, P_1P_2P_4, P_1P_3P_5, P_1P_4P_{10}, P_1P_5P_{10}, P_2P_3P_7, P_2P_4P_8, P_2P_7P_8, P_3P_5P_6,$
 $P_3P_6P_7, P_4P_8P_9, P_4P_9P_{10}, P_5P_6P_{11}, P_6P_7P_{11}, P_8P_9P_{12}, P_9P_{10}P_{12}$

正 4 角形 $P_5P_{10}P_{12}P_{11}, P_7P_8P_{12}P_{11}$

となる. 多面体のグラフは図 9 となる.

[2] では, この情報から連立代数方程式 (変数 36 個, 方程式 60 本) を立てて, [2, p.97 (7.29)]

$$\begin{aligned} x_{11} = -1, y_{11} = 0, z_{11} = 0, x_{12} = 1, y_{12} = 0, z_{12} = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = -1, y_1 = 1, z_2 = z_1, \\ x_4 = -x_3, y_3 = 0, y_4 = 0, z_4 = z_3, y_6 = 0, y_9 = 0, x_9 = -x_6, z_9 = z_6, x_5 = -1, x_7 = -1, x_8 = 1, \quad (3) \\ x_{10} = 1, y_8 = -y_5, y_7 = -y_5, y_{10} = y_5, z_7 = z_5, z_8 = z_5, z_{10} = z_5 \end{aligned}$$

を代入し, 変数 7 個, 方程式 48 本の連立代数方程式を解いて解 36 個を得ている. この内, 実数解は 16 個であり, 疑似ザルガラー多面体が 8 個得られることがわかっている.

条件式 (3) をなるべく減らして連立代数方程式を解き, 見つからない疑似ザルガラー多面体があるかどうかを調べる. 正 4 角形の頂点 P_5, P_6, P_{12}, P_{11} を xy 平面の $(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0), (1, -1, 0)$ に配置し, この面に隣接する面 (正 3 角形, 正 4 角形) の頂点についての明らかな条件

$$y_6 = 0, y_9 = 0, x_1 = 0, x_7 = -1, x_8 = 1, y_7 = y_8, z_7 = z_8, x_2 = 0$$

を追加する (図 10). 式としては,

$$\begin{aligned} x_5 = 1, y_5 = 1, z_5 = 0, x_6 = -1, y_6 = 1, z_6 = 0, x_{12} = -1, y_{12} = -1, z_{12} = 0, \\ x_{11} = 1, y_{11} = -1, z_{11} = 0, y_6 = 0, y_9 = 0, x_1 = 0, x_7 = -1, x_8 = 1, y_7 = y_8, z_7 = z_8, x_2 = 0 \end{aligned}$$

となる. これを一番最初に立てた連立代数方程式に代入すると, 変数が 16 個で, 46 本の連立代数方程式が得られる. これは有理数係数で全次数逆辞書式順序についてグレブナー基底を求めることができる (1540 s 程度). しかしこれは 0 次元イデアルにならない. 面が重なったものが無数に現れるということになる.

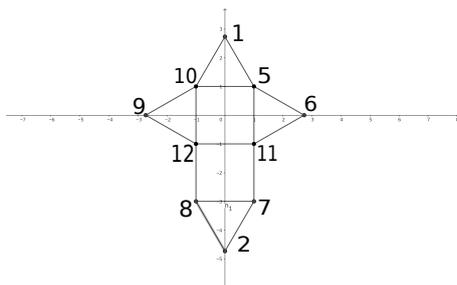


図 10: M_{23} の頂点 P_5, P_6, P_{12}, P_{11} の xy 平面への配置

そこで P_7 が P_5 に重ならない、すなわち 2 枚の正 4 角形が重ならないように条件を追加する。 $z_7 \neq 0$ という条件をイデアルに付加することになる。これには、新しい変数 t を用意して $z_7 t - 1$ をイデアルに追加して、 t について消去イデアルを計算すればよい。このイデアルのグレブナー基底を求めることができ (20 s 程度)、0 次元イデアルであって解は 88 個あることがわかる。このうち、実数解は 52 個あり、[2] にはない疑似ザルガラー多面体が 8 個見つかる。

6 計算結果と今後の展望

表にまとめると以下の通りとなった。

多面体	変数	式	解	GB 計算	既知のもの	新たなもの
M_8	25 個	80 本	12 個	380s	2 個	2 個
M_{22}	12 個	38 本	20 個	2s	4 個	3 個
M_{23}	17 個	47 本	88 個	20s	8 個	8 個

グレブナー基底計算には、有理数係数で全次数逆辞書式順序を使い、数式処理ソフト Risa/Asir の関数 `nd_gr` を用いた。グレブナー基底から、連立代数方程式の実数解を近似的に求め、多面体の描画を行うのに、数式処理ソフト Mathematica を用いた。PC として CPU: Core i7-3520(2.9 GHz)、メモリ 16GB のものを使用した。

今回計算した各疑似ザルガラー多面体 M_8, M_{22}, M_{23} に対するイデアル、グレブナー基底、頂点の座標のデータの詳細については <https://sites.google.com/view/qzalgaller-data/> に upload している。

ここでは M_8, M_{22}, M_{23} に対して計算を行ったが、他のタイプのザルガラー多面体でも新たな疑似ザルガラー多面体が見つかる可能性はあると思われる。これは今後の課題である。

参考文献

- [1] 小林光夫, 鈴木卓治, 「正多角形を面にもつすべての凸多面体の頂点座標の計算」, 電気通信大学紀要, 第 5 巻 (1992), 147–184
- [2] 関口次郎, 「多面体の数理とグラフィックス」, 牧野書店
- [3] V. A. Zalgaller, "Convex polyhedra with regular faces", Consultants Bureaux, 1969.
- [4] M. Noro et al., Risa/Asir, <http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir-ja.html>

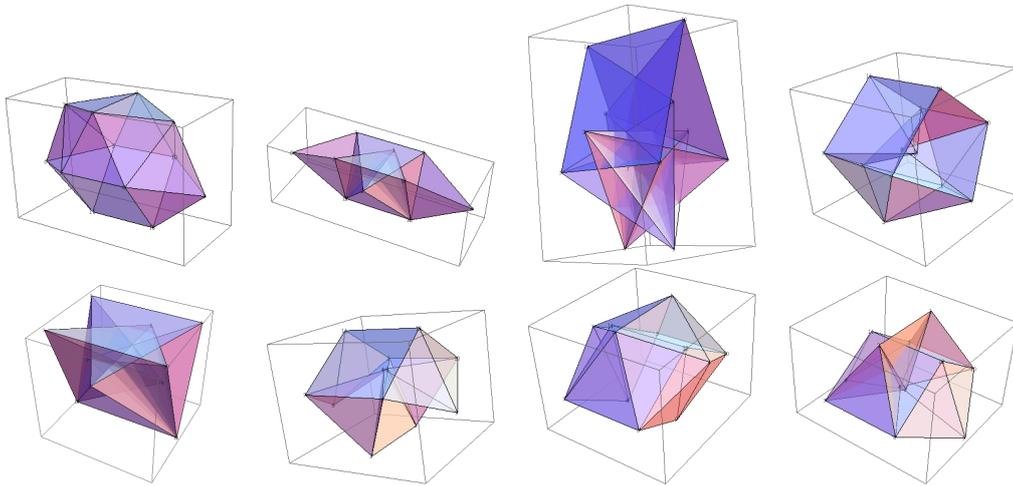


図 11: M_{23} の既知の疑似ザルガラー多面体 (一番左上はザルガラー多面体 M_{23} 自身)

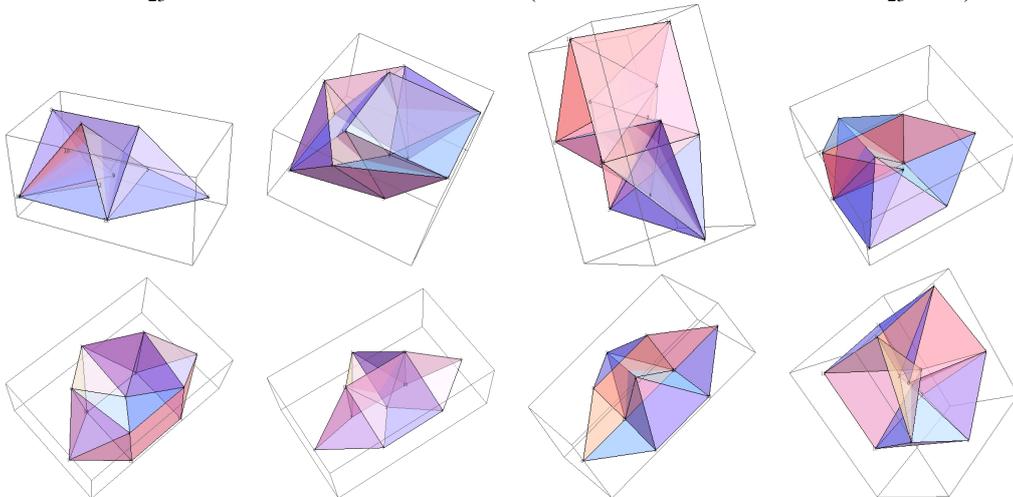


図 12: M_{23} の新たな疑似ザルガラー多面体