数式処理 *Bulletin of JSSAC(2022)*
Vol. 28, No. 2, pp. 35 - 51

特集論文

探究的な活動のための動的幾何ソフトウェアの活用について

北本卓也 *

山口大学教育学部

(Received June 20, 2021 Revised November 12, 2021 Accepted December 20, 2021)

概 要

Starting in the 2020 school year, "Courses of Study" with an emphasis on "inquiry-based learning" are being promoted. It has been pointed out that using dynamic geometry software to explore the direction of proofs through trial and error is an effective inquiry activity. Therefore, this paper focuses on teaching materials for exploratory activities using dynamic geometry software.

First, some previous studies on dynamic geometry software and teaching materials using it are presented, and the role of dynamic geometry software in inquiry-based learning is discussed. Then, a series of teaching materials to encourage exploratory activities are proposed, and the relationship between the teaching materials and the four steps in inquiry-based learning will be analyzed. In addition, we will discuss the linkage between dynamic geometry software and computer algebra systems for "inquiry-based learning".

1 はじめに

2020 年度から小中高の各段階において始められる「学習指導要領」([1]-[3]) において，特に注目されるキーワードが「探究」であり,「探究型学習」を重点的に置いた学習内容が注目を集めている.

この「探究型学習」という言葉は文部科学省が 2013 年に刊行した「今，求められる力を高める総合的な学習の時間の展開」という資料 ([4]) で次のように定義づけれらている.

> 探究的な学習とは，図 1 のような問題解決的な活動が発展的に繰り返されていく一連の学習活動である.

ここで図 1 のスパイラルに含まれる 4 つのステップ「課題の設定」「情報の収集」「整理・分析」「まとめ・表現」の解説は以下の通りである.

(1) 「課題の設定」 体験活動などを通して，課題を設定し課題意識をもつ

*kitamoto@yamaguchi-u.ac.jp

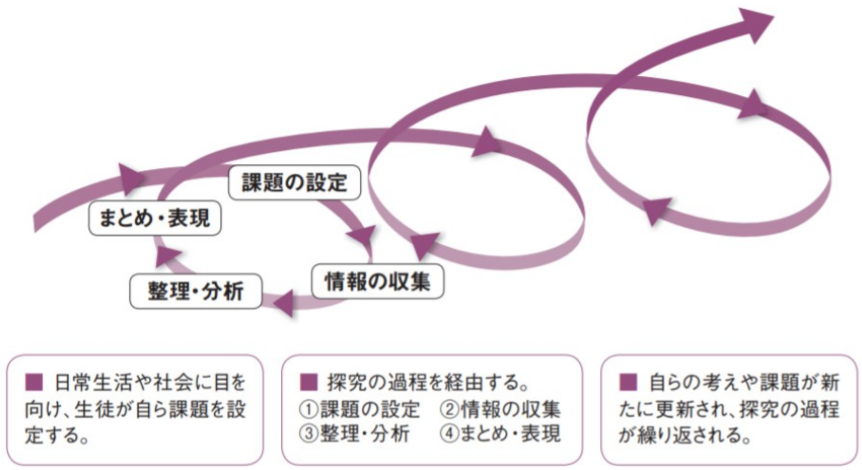

図 1: 探究的な学習

(2) 「情報の収集」 必要な情報を取り出したり収集したりする
(3) 「整理・分析」 収集した情報を，整理したり分析したりして思考する
(4) 「まとめ・表現」気付きや発見，自分の考えなどをまとめ，判断し，表現する

この「探究型学習」は文系・理系を問わず全ての科目に当てはまる教科横断的な考え方であるが，本稿では特に数学に焦点をあて，この「探究型学習」を促すような数学の問題を考える．各種学校で教えられる教科の中で数学はこの「探究型学習」との関連が強いとされ，従来から学習者の「探究的」な思考を促すような問題についての研究がなされてきた．特に動的幾何ソフトウェアを用いて図形の性質の探究活動を行い，証明の方向性を見いだしていくことは，学習者の試行錯誤を促進し，探求的な活動に繋がると指摘されている．実際に小松 ([5]) は，生徒が証明と論駁の活動に取り組みやすくするように動的幾何ソフトウェアを活用した教材を作成することの重要性を指摘し，そのような教材の有効性を確認している．

そこで本稿では，次節で探究的な活動のための動的幾何ソフトウェアの活用について述べる．また，本稿では数式処理システムも活用するので，まず，数式処理システムと幾何学の関係について触れ，本稿で用いる QE (Quantifier Elimination) について概説する．次に，動的幾何ソフトウェアとそれを用いた教材の先行研究をいくつか示し，動的幾何ソフトウェアの「探究型学習」における役割について論じる．その後に「探究型学習」を促す一連の問題とその教材を提案する．また，その問題・教材と「探究型学習」における４つのステップとの関わりについて分析し，「探究型学習」へ向けての動的幾何ソフトウェアと数式処理システムの連携について述べる．

2 数式処理システムと幾何学

数式処理システムを用いて幾何学の研究を行う試みは依然より行われており，特に有名なのは座標に用いて幾何の問題を代数方程式に置き換え，初等幾何の定理を証明する自動定理証明で

ある．この研究を先行したと言われてのは「Wu の方法」 と呼ばれる方法である（Wu の方法については [6] の第 6 章第 5 節を参照）．同じことはグレブナー基底を用いても行えるため，グレブナー基底を用いた自動定理証明の研究も行われている．「Wu の方法」における Characteristic Set を用いたほうが計算効率が良いと言われているが，グレブナー基底による自動定理証明における計算効率についての研究が [7] で行われている．これらの Wu の方法やグレブナー基底で任意の幾何の問題の自動証明が可能であるわけでないが，自動証明が可能である幾何の問題のクラス分けと，そのクラスの問題を解くための方法の対応付けが [8] で述べられている．

また，数式処理の分野では QE (Quantifier Elimination) という比較的新しいアルゴリズムが近年，注目を集めており，様々な方面に応用されている．この QE は日本語では「限量子消去」とも呼ばれているが，本稿ではこの QE を幾何の問題の解法に応用するので，これについて簡単に説明する．QE とは一言でいうと，「Quantifier ($\forall, \exists$) を含んだ代数的な一階述語論理式から Quantifier ($\exists, \forall$) を取り除き，それと等価な自由変数のみの代数的な式を求めるアルゴリズム」である．

例えば，「x の方程式 $x^2 + bx + c = 0$ が実数解を持つ」という論理式は，Quantifier を用いて “$\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 + bx + c = 0$” と書けるが，これを QE を用いて Quantifier ($\exists, \forall$) を含まない論理式に変換すると，$b^2 - 4c > 0$ を得る．ここでは紙面の都合上，QE のアルゴリズムやその応用については述べないが，[9] に詳しい解説がある．

国立情報学研究所が主導した「ロボットは東大に入れるか」というプロジェクト（通称「東ロボプロジェクト」）は計算機に東京大学に合格できるだけの学力を付けさせる（つまり，入試問題を解かせて合格点を取らせる）ことを目標にしていたが，数学の問題を解くためには主に QE を用いた手法が用いられていた ([10])．「東ロボプロジェクト」の数学の得点は決して低くなかった ([11]) ことは，QE が高等学校に学ぶ数学に広く適用可能であることを示していると思われる．

なお，Wolfram Research 社の商用数式処理システムである *Mathematica* でも QE を使うことができるが，*Mathematica* では “$\exists x \in \mathbf{R},\ p(x)$” に対して QE を行うには

`Resolve[Exists[x,Element[x,Reals],` $p(x)$ `],Reals]`

と入力する．同様にして，”$\forall x \in \mathbf{R},\ q(x)$” に対して QE を行うには

`Resolve[ForAll[x,Element[x,Reals],` $q(x)$ `],Reals]`

と入力する．例えば，上の “$\exists x \in \mathbf{R},\ x^2 + bx + c = 0$” に対して，QE を行うには

```
Resolve[Exists[x,Element[x,Reals],x^2+b*x+c==0],Reals]
```

を入力すれば良い，これを入力すると，”`b^2-4c>0`” が計算結果として出力される．

また，p, q を命題とした時，合成命題「p かつ q」を *Mathematica* で簡単化するには命令 `Reduce(p && q)` を用いれば良い．

3　探究的な活動と動的幾何ソフトウェア

動的幾何ソフトウェアとは，教育用を指向したコンピュータソフトウェアであって，幾何学の作図を行い，かつ作図後にその図中の点や線を変更できるものをいう．筆者の知る範囲にお

いて具体名を挙げると，GeoGebra ([13])，Cinderella ([12])，GC(Geometric Constructor) ([14])，KSEG ([15])，Cabri ([16]) などである．

紙に作図した場合と異なり，動的幾何ソフトウェアで作図を行った場合は，作画後に幾何要素（点・直線・円など）を動かして，作図全体を変化させることが可能である．この幾何要素（点・直線・円など）を動かす機能を活用することにより，様々な図形の試行錯誤が可能となり，探求的な学習活動を促すとされる．実際，動的幾何ソフトウェアを用いた教材の長所として次のものが考えられる．

- 手を動かせば良いので，数学が苦手な生徒でも取り組みやすい．
- 色々と試行錯誤することで解答が予想できる．

このため，「探求的な学習活動」が注目される以前より動的幾何ソフトウェアを活用した教材作成の研究が行われてきている．例えば，筆者や金子らは動的幾何ソフトウエア Cinderella を活用した教材の研究 ([17], [18],[19]) を，大西は動的幾何ソフトウエア Geogebra を活用した教材の研究 ([20]) を行ってきている．また，飯島らは動的幾何ソフトウェア GC が有効である幾何の問題の開発に取り組んでおり，実際に開発した問題の教材を GC で作成して公開している ([21])．これらの問題は単純な計算・証明問題ではなく，実際に図形を動かして試行錯誤しなければ解けない問題がほとんどである．その一例を下に挙げる．

四角形 ABCD を考える．図 3 のように辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ E, F, G, H とす

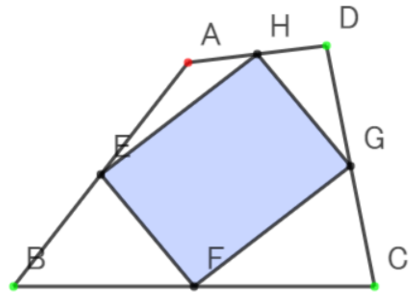

図 2: 探求的な学習活動を要する問題

るとき次の問いに答えなさい．

(1) ABCD をいろいろな形にしてみたとき, EFGH はどのような形になるか調べよ．
(2) EFGH を長方形にしたい．ABCD をどんな形にしたらいいか．

上の問題の (1) の解答は平行四辺形である．こちらは実際に動的幾何ソフトウェアの上で点 A, B, C, D を動かせば容易に予測できる（動的幾何ソフトウェアを使わず，図形を手で作画しなけ

ればならない場合は解答の予測はそれほど容易ではない）．また，その証明もそれほど難しくない．よって，動的幾何ソフトウェアを使えば比較的容易に解ける問題であり，そういった意味では動的幾何ソフトウェアの有効性を示す問題であると言える．

次に (2) の解答であるが，実はこれは意外に難しい．筆者は大学生に動的幾何ソフトウェア上の教材でこの問題をやらせたことがあるが，「ひし形」と答えた学生が多かった．「ひし形」という解答は誤りではないが適切でない．ABCD がひし形であれば確かに EFGH は長方形となるが，図 3 を見ると明らかなように ABCD はひし形ではないが，EFGH が長方形となる場合があるからである．正しい答えは「ABCD の対角線が直行する」である（ひし形ならば対角線は直行するが，逆は必ずしも正しくない）．このように，動的幾何ソフトウェアで図を動かして得られたものはあくまで予想であり，それを解答とするためには証明が必要である（そういった意味では先の (2) の問題は，動的幾何ソフトウェアの危険性を示す問題であると言える).

上で示したように，動的幾何ソフトウェアは探求的な活動において非常に有用であるが，図形を動かすことで得られるものはあくまで予想であることに注意する必要がある．厳密な方法で証明されない限り，予想は証明された結果とは異なり，上の例で示すように予想が外れることもありうる．故に

(1)　動的幾何ソフトウェアを用いて，解答の予想を行う（仮説形成）
(2)　予想されたものを証明により確認（仮説検証）

の２つのステップによるアプローチが必要である．この (2) の仮説検証では（特に手計算による証明が困難である場合には)，数式処理システムの活用が有効であろう．これは動的幾何ソフトウェアと数式処理システムの組み合わせが，探求的な活動に適した教材作成のための強力な道具となりうるということ示している．

4　探究的な活動のための教材例

ここでは探究的な活動のための一連の問題とその教材例，ならびにそれら分析結果について述べる．なお，ここでは一連の３つの幾何の問題を提案するが，それぞれ中学校向け，高等学校校向け，大学向けとなっている．

4.1　AC + CB の最小化問題（最短経路問題）

4.1.1　問題設定

まず，次の問題 1 を考える（この問題は中学校向けの問題である).

問題 1

平面上に図 3 のように点 A,B,C があるとする．点 C が直線 DE 上を動くとき，AC + CB が最小となる位置を求めなさい.

4.1.2　問題の教材

この問題の教材として，Cinderella で図 4 のような教材を作成した．この教材では，点 C が動くと AC + CB の値がリアルタイムに再計算され，画面下に表示されるようになっている．学習者は，これを用いて最小値のどの辺りになるかという情報を得ることができ，それをもとに最小

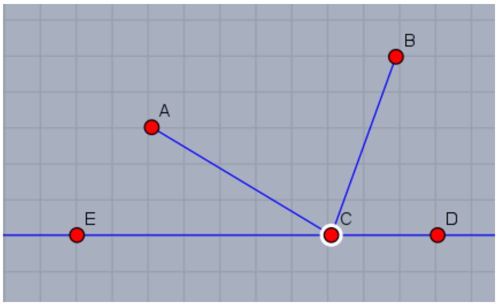

図 3 : 問題の設定

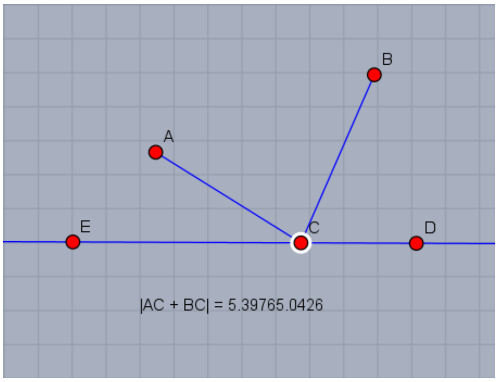

図 4：問題 1 の教材

値を取る点の性質を予想できる．また，この教材は動的幾何ソフトウェア Cinderella の機能（正確には CindyJS の機能）により，点 A, B を自由に動かすことができる．よって，様々な状況の元での AC + CB の値を観察することが可能である（このことにより，学習者はより多くの情報の元に最小値を取る点の性質を予想できる）.

この教材を用いた学習者の学習活動は探究的な活動の 4 つのステップに従い，次のようになると予想される.

(1) 課題の設定：問題 1 の内容の把握.
(2) 情報の収集：図 4 の教材において点 C を色々動かして，どの辺りで最小となるかを観察する.
(3) 整理・分析：上の (2) のステップで収集した情報に基づき，最小値を取る点の性質を予想する．予想ができない場合は上の (2) のステップに戻り，点 A, B の位置を変えてもう一度，上の (2) の「情報の収集」をやり直す.
(4) まとめ・表現：上の (3) で立てた予想が正しいことを，その証明を行うことで確認する．証明ができなかった場合は，(3) の「整理・分析」をやり直す.

4.1.3　問題の解答

この問題は良く知られており，その解答は次の通りである．図 5 のように点 A から直線 DE

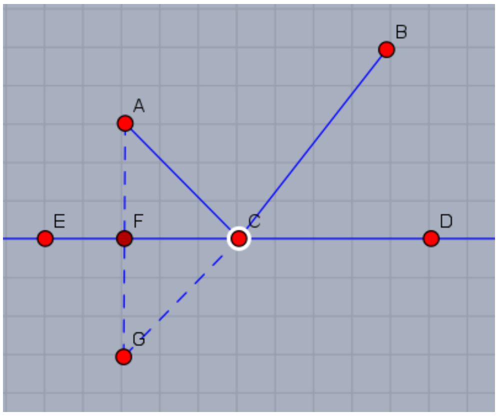

図 5：問題 1 の解答

に垂線をおろし，その垂線の足を F とする．その垂線上に点 G を AF = FG を満たすように取る．直線 BG 上に点 C を置くとき，AC + CB の値が最小となる．

この証明は以下の通りである．点 G の取り方より，三角形 CAF と CGF は合同である．よって AC = GC となり，AC + CB = GC + CB を得るが，直線 BG 上に点 C を置くとき GC + CB の値が最小となるのは明らかなので題意を得る．

ちなみに AC + CB は点 C を遠方に持っていけばいくらでも大きくできるため，その最大値は存在しない（無限大に発散する）．

4.1.4　問題の内容評価

問題 1 は良く知られている問題であるが，予めその解答を知らない学習者が解答の予想を立てることはかなり難しいと思われる．

本稿の教材を用いて，点 C を具体的に動かしていけば最小値を取る点の位置はわかるが，その位置がどういう性質を満たしているかを理解することは簡単ではない．すなわち，学習者の学習活動の 4 つのステップのうち，(1)「課題の設定」，(2)「情報の収集」は教材を用いることで比較的容易に行うことが可能であるが，(3)「整理・分析」，(4)「整理・分析」のステップは困難である．よって，実際の授業で生徒が (3)「整理・分析」の予想を立てる所で止まってしまっている場合には点 G をヒントとして表示することも必要となるであろう．

4.2　AC − CB の最小化問題

4.2.1　問題設定

先程の問題 1 を少し変形したものとして，次の問題を考える（この問題は高等学校向けである）．

問題 2

平面上に図 3 のように点 A,B,C があるとする．点 C が直線 DE 上を動くとき，AC − CB の値

が最小となる位置を求めなさい．ただし，点 A の y 座標の値は 点 B の y 座標の値より小さいとします．

4.2.2 問題の教材

問題 1 と同様に Cinderella でこの問題を解くための教材を作成した．図 4 のものとほとんど同じであるが，画面下部には AC − CB の値がリアルタイムに再計算され，表示されるようになっているので，学習者はこれを用いて最小値を取る点の性質を予想できる．

この教材を用いた学習者の学習活動は探究的な活動の 4 つのステップに従い，次のようになると予想される．

(1) 課題の設定：問題 2 の内容の把握．
(2) 情報の収集：教材において点 C を色々動かして，どの辺りで最小となるかを観察する．
(3) 整理・分析：上の (2) のステップで収集した情報に基づき，最小値を取る点の性質を予想する．予想ができない場合は上の (2) のステップに戻り，点 A, B の位置を変えてもう一度，上の (2) の「情報の収集」をやり直す．
(4) まとめ・表現：上の (3) で立てた予想が正しいことを，その証明を行うことで確認する．証明ができなかった場合は，(3) の「整理・分析」をやり直す．

4.2.3 問題の解答

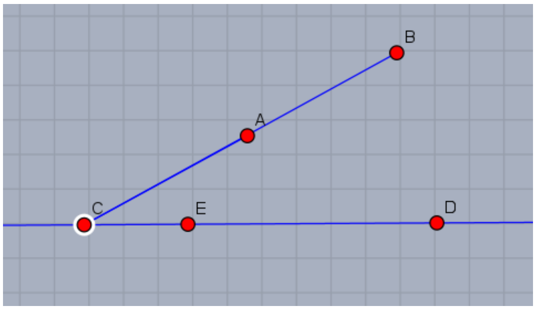

図 6：問題 2 の解答

図 6 にあるように，直線 AB 上に点 C を置くときが AC − CB が最小となる．

この証明は以下の通りである．直線 AB 上に点 C があるとすると AC − CB = −AB なので，この場合以外は AC − CB > −AB であることを示せば良い．これは三角形 ABC が成り立つのための辺の条件 AC + AB > CB より明らかである．故に題意が示された．

ちなみに問いにはないが，三角形 ABC が成り立つのための辺の条件より AC < AB + CB．よって AC − CB < AB となり，AC − CB の上限が存在することはわかる．

4.2.4 問題の内容評価

問題 2 は問題 1 よりは広まっていない問題である．解答を見るとわかるように，かなりわかりやすい所 (直線 AB 上) で最小値を取るので，実際に教材を用いて点 C を動かしてみれば，最

小値を取る点の性質（直線 AB 上にある）を予想することは容易である．すなわち，学習者の学習活動の４つのステップのうち，(1)「課題の設定」，(2)「情報の収集」，(3)「整理・分析」までは教材を用いれば比較的容易に進められると考えられる．ただし，最後の (4)「整理・分析」のステップは思ったより困難な箇所である．解答を見れば「三角形 ABC が成り立つための辺の条件」しか用いていないので証明は容易であるように見えるが，実際にこの教材を用いて授業を行うと，証明の部分で躓く場合が多い．また，誤りではないが，AC − CB を数式で表現し，それを微分して最小値を求めようとして問題を難しくしてしまうケースも多く見られる．よって，実際の授業で生徒が (4)「まとめ・表現」の証明のところで止まってしまっている場合には，「三角形 ABC が成り立つための辺の条件に注意」としてヒントを出すことも必要である．

4.3　問題の一般化

上の 問題 1，問題 2 の一般化として次の問題を考える（この問題は大学向けである）．

問題 3

平面上に図 3 のように点 A,B,C があるとする．点 C が直線 DE 上を動くとき，AC + r CB が最大・最小となる点が存在するかどうかを述べよ．ただし，r は実数とし，A, B の座標をそれぞれ $(0, 1)$, $(2, 3)$ とする．また，C は x 軸上にあるとする．

問題 1，問題 2 は上の問題において，パラメータ r をそれぞれ 1, −1 とおいたものと考えることができる．

4.3.1　問題の教材

この問題の教材として，Cinderella で図 7 のような教材を作成した．この教材は以下の特徴を

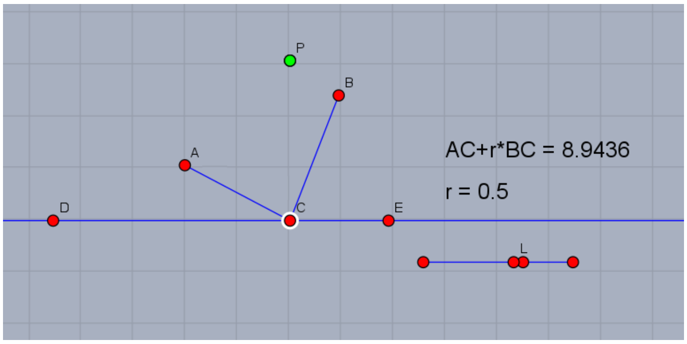

図 7：問題 3 の教材

持っている．

(a) 点 C を動かすことが事が可能で，点 C が動くと |AC + r CB| の値がリアルタイムに再計算され，画面右下に表示される

(b) r の値を画面下にある点 L を動かすことにより調整できる．

(c) 点 P は点 C の動きと連動して動く．点 P の x 座標は点 C の x 座標と同じであり，点 P の y 座標は $|\mathrm{AC} + r\,\mathrm{CB}|$ の値に 0.3 をかけたものになる．また，点 P の軌跡が画面に残る（図 8 を参照）．

上の (b), (c) の機能は問題 1，問題 2 の教材にはない機能である．(b) の機能は r を値を変更するのに使われる．(c) の機能は $|\mathrm{AC} + r\,\mathrm{CB}|$ の値の変化を図的に理解するために使われる．

例として，$r = 0.5$ のときに点 P を動かしたときの様子を図 8 に示す．

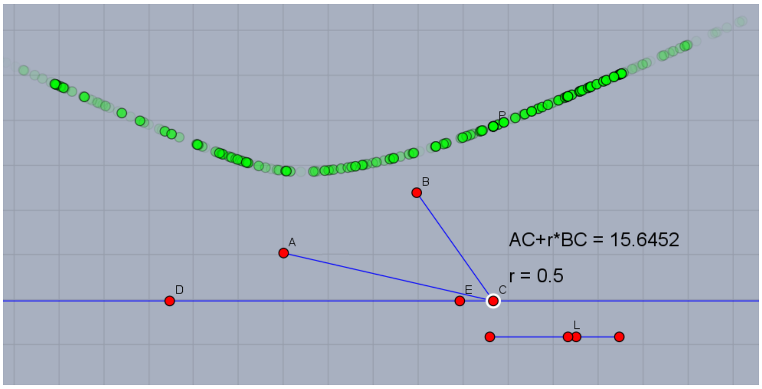

図 8：問題 3 の教材の使用例

この問題は先の問題 1，問題 2 よりも複雑な構造をしており，点 C と実数 r の 2 つのパラメータを持っている．この 2 つのパラメータは互いに関係しており，この問題を 2 つに分けることは困難である．よって，この教材を用いた学習者の学習活動は，次のように入れ子構造を持つと考えられる．

(1) 課題の設定：問題 3 の内容の把握．

(2) 情報の収集：教材において実数 r の値を色々変えながら，点 C を色々動かし，$|\mathrm{AC} + r\,\mathrm{CB}|$ が最大値，最小値を取るかどうかを観察するために，下のようなステップを踏む．

 (2-a) 課題の設定：実数 r の適当に値に固定する．

 (2-b) 情報の収集：点 C の値を色々変えながら，$|\mathrm{AC} + r\,\mathrm{CB}|$ の値の変化を見るために点 P の軌跡を観察する．

 (2-c) 整理・分析：上の (2-b) のステップで収集した情報に基づき，最小値，最大値を取るかどうかを予想する．

 (2-d) まとめ・表現：上の (2-c) で立てた予想が正しいことを，その証明を行うことで確認する．証明ができなかった場合は，(2-c) の「整理・分析」をやり直す．

(3) 整理・分析：上の (2) のステップで収集した情報に基づき，最小値，最大値を取る r の範囲を予想する．予想ができない場合は上の (2) のステップに戻り，r の値を変えてもう一度，上の (2) の「情報の収集」をやり直す．

(4) まとめ・表現：上の (3) で立てた予想が正しいことを，その証明を行うことで確認する．

証明ができなかった場合は，(3) の「整理・分析」をやり直す．

4.3.2　問題の解答

この問題は問題 1，問題 2 のように幾何的な性質のみを用いて解くことは困難なので数式処理システムを用いた解答と手で導く解答（すなわち普通の解答）の 2 つを示す．

まず，数式処理システムを用いた解答であるが，この方法では QE (Quantifer Elimination) で解答を計算する．

今，点 C の座標を $(x, 0)$ と置くと，$\mathrm{AC} = \sqrt{x^2+1}$，$\mathrm{CB} = \sqrt{(x-2)^2+9}$ より，$|\mathrm{AC} + r\,\mathrm{CB}| = \sqrt{x^2+1} + r\sqrt{(x-2)^2+9}$ となる．これを $f(x, r)$ と置く．

$$f(x, r) = \sqrt{x^2+1} + r\sqrt{(x-2)^2+9} \tag{1}$$

この関数の最大値，最小値を考えれば良いが，これを QE を用いて計算する．このために，最大値，最小値が満たす論理式を考える．$f(x, r)$ の最大値を M，最小値を m と置くと

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x, r) \leq M,\ \ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x, r) = M,\ \ \ \forall x \in \mathbf{R},\ f(x, r) \geq m,\ \ \exists x \in \mathbf{R},\ f(x, r) = m \tag{2}$$

が成り立つので，この論理式を用いて，最大値 M と最小値 m を *Mathematica* で計算する．計算の経過を図 9（最小値の計算過程），図 10（最大値の計算過程）に示す． 図 9 の計算結果を見

```
In[28]:= a = {0, 1}; b = {2, 3}; c = {x, 0};

In[29]:= dis[p_, q_] := Sqrt[Apply[Plus, (p - q)^2]]

In[30]:= f = dis[a, c] + r * dis[b, c]

Out[30]= r Sqrt[9 + (2 - x)^2] + Sqrt[1 + x^2]

In[31]:= c1 = Resolve[ForAll[x, Element[x, Reals], f ≥ m], Reals];

In[32]:= c2 = Resolve[Exists[x, Element[x, Reals], f == m], Reals];

In[33]:= tmp1 = Reduce[c1 && c2]

Out[33]= (r == -1 && m == -2 Sqrt[2]) || (-1 < r ≤ -0.274... && m == Root[160 - 4 480 r^2 + 34 240 r^4 - 40 320 r^6
    + 12 960 r^8 + (-312 - 3 848 r^2 + 7 256 r^4 - 4 824 r^6) #1^2 + (145 - 418 r^2 + 673 r^4) #1^4 + (6 - 42 r^2) #1^6
    + #1^8 &, 2]) || (-0.274... < r ≤ 0 && m == Root[160 - 4 480 r^2 + 34 240 r^4 - 40 320 r^6 + 12 960 r^8
    + (-312 - 3 848 r^2 + 7 256 r^4 - 4 824 r^6) #1^2 + (145 - 418 r^2 + 673 r^4) #1^4 + (6 - 42 r^2) #1^6 + #1^8 &,
    3]) || (0 < r < 1 && m == Root[160 - 4 480 r^2 + 34 240 r^4 - 40 320 r^6 + 12 960 r^8 + (-312 - 3 848 r^2
     + 7 256 r^4 - 4 824 r^6) #1^2 + (145 - 418 r^2 + 673 r^4) #1^4 + (6 - 42 r^2) #1^6 + #1^8 &, 4]) || (1 ≤ r ≤
    1.12... && m == Root[160 - 4 480 r^2 + 34 240 r^4 - 40 320 r^6 + 12 960 r^8 + (-312 - 3 848 r^2 + 7 256 r^4
     - 4 824 r^6) #1^2 + (145 - 418 r^2 + 673 r^4) #1^4 + (6 - 42 r^2) #1^6 + #1^8 &, 8]) || (r > 1.12... && m
    == Root[160 - 4 480 r^2 + 34 240 r^4 - 40 320 r^6 + 12 960 r^8 + (-312 - 3 848 r^2 + 7 256 r^4 - 4 824 r^6) #1^2
    + (145 - 418 r^2 + 673 r^4) #1^4 + (6 - 42 r^2) #1^6 + #1^8 &, 4])
```

図 9：問題 3 の最小値の計算過程

ると，$r \geq -1$ については $f(x, r)$ の最小値が計算されているが $r < -1$ における最小値はその記述

```
In[34]:= d1 = Resolve[ForAll[x, Element[x, Reals], f ≤ M], Reals];

In[35]:= d2 = Resolve[Exists[x, Element[x, Reals], f == M], Reals];

In[36]:= tmp2 = Reduce[d1 && d2]

Out[36]= (r ≤ -1.22… && M == Root[160 - 4 480 r^2 + 34 240 r^4 - 40 320 r^6 + 12 960 r^8 + (-312 - 3 848 r^2 + 7 256
           r^4 - 4 824 r^6) #1^2 + (145 - 418 r^2 + 673 r^4) #1^4 + (6 - 42 r^2) #1^6 + #1^8 &, 2]) || (-1.22… <
         r < -1.12… && M == Root[160 - 4 480 r^2 + 34 240 r^4 - 40 320 r^6 + 12 960 r^8 + (-312 - 3 848 r^2
           + 7 256 r^4 - 4 824 r^6) #1^2 + (145 - 418 r^2 + 673 r^4) #1^4 + (6 - 42 r^2) #1^6 + #1^8 &,
          3]) || (-1.12… ≤ r < -1 && M == Root[160 - 4 480 r^2 + 34 240 r^4 - 40 320 r^6 + 12 960 r^8
          + (-312 - 3 848 r^2 + 7 256 r^4 - 4 824 r^6) #1^2 + (145 - 418 r^2 + 673 r^4) #1^4 + (6 - 42 r^2) #1^6 + #1^8 &,
          5])
```

図 10：問題 3 の最大値の計算過程

がない（つまりその場合には最小値は定義されない）．よって，最小値が存在する範囲は $r \geq -1$ であることがわかる．

同様に図 10 の計算結果を見ると，$r < -1$ については $f(x, r)$ の最大値が計算されているが $r \geq -1$ における最大値はその記述がない（つまりその場合には最大値は定義されない）．よって，最大値が存在する範囲は $r < -1$ であることがわかる．ただし $r = -1$ の場合は前節の「問題の解答」で述べたように，$f(x, r)$ は無限大には発散せず，その上限値は存在する（$r = -1$ のときの $y = f(x, r)$ のグラフを図 11 に示す）．

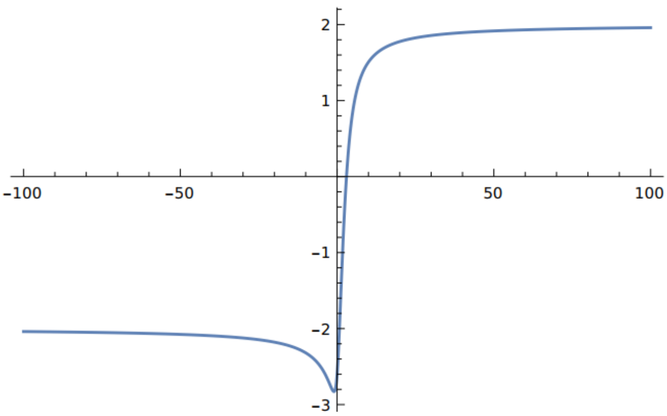

図 11：$r = -1$ のときの $y = f(x, r)$ のグラフ

次に，手で解答を導く手順を示す（むろん，これはあくまで解答例の 1 つであり，他の解答手順を否定するものではない）．まず，$f(x, r)$ を

$$f(x, r) = \mathrm{AC} - \mathrm{CB} + (r + 1)\mathrm{CB} \tag{3}$$

と考える．問題 2 より AC − CB には最小値は存在し，「問題の解答」のところで述べたように

AC − CB は上限をもつ．すなわち，AC − CB は有界である．これと

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{CB} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \mathrm{CB} = \infty \tag{4}$$

と (3) より，次のことがわかる．

- $r+1>0$ $(r>-1)$ のとき，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,r) = \infty$
- $r+1<0$ $(r<-1)$ のとき，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,r) = -\infty$

よって，$r+1>0$ の時の最大値，$r+1<0$ の時の最小値は存在しない．$r+1>0$ の時の最小値，$r+1<0$ の時の最大値については次のようになる．まず，$r+1>0$ の時を考えると，次の式

$$|x-2| > m \Rightarrow \mathrm{CB} = \sqrt{(x-2)^2+9} > |x-2| > m \tag{5}$$

に注意し，$m = 3 + \frac{\sqrt{5}}{r+1}$ とすると

$$|x-2| > 3+\frac{\sqrt{5}}{r+1} \Rightarrow f(x,r) = |\mathrm{AC}-\mathrm{CB}|+(r+1)\mathrm{CB} > -3+(r+1)\left(3+\frac{\sqrt{5}}{r+1}\right) = 3r+\sqrt{5} = f(2,r)$$

となるので，$f(x,r)$ は $|x-2| > 3+\frac{\sqrt{5}}{r+1}$ においては最小値を取ることはない．よって，$f(x,r)$ に最小値が存在するならば，$|x-2| \leq 3+\frac{\sqrt{5}}{r+1}$ を満たす x においてその最小値を取る．$f(x,r)$ は x の連続関数であり，$|x-2| \leq 3+\frac{\sqrt{5}}{r+1}$ を満たす x は x の閉区間であるから $f(x,r)$ はこの区間で最小値を取る（これは直感的には明らかであるが，厳密には示すためには高等学校で学ぶ範囲には入らない「最大値・最小値の定理」を使う必要がある）．故に $r+1>0$ のとき，$f(x,r)$ の最小値は存在する．

同様にして $r+1<0$ の時は (5) において $m = 3-\frac{5-\sqrt{5}}{r+1}$ とすると

$$|x-2| > 3-\frac{5-\sqrt{5}}{r+1} \Rightarrow f(x,r) = |\mathrm{AC}-\mathrm{CB}|+(r+1)\mathrm{CB} < 2+(r+1)\left(3-\frac{5-\sqrt{5}}{r+1}\right) = 3r+\sqrt{5} = f(2,r)$$

となる ($r+1<0$ に注意) ので，$f(x,r)$ は $|x-2| > 3-\frac{5-\sqrt{5}}{r+1}$ においては最大値を取ることはない．すなわち，$|x-2| \leq 3-\frac{5-\sqrt{5}}{r+1}$ において $f(x,r)$ は最大値を取る．故に $r+1<0$ のとき，$f(x,r)$ の最大値は存在する．

$r=-1$ のときは次のようになる．等式 $\frac{d}{dx}f(x,-1) = 0$ を変形すると $(x-2)\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{x^2-4x+13}$ を得るが，この両辺を二乗して方程式を解くと $x=-1, \frac{1}{2}$ を得る．$x=\frac{1}{2}$ は不適なので解は $x=-1$ のみとなり，$f(x,-1)$ はこの点でのみ極値を取りうる．問題 2 より $f(x,-1)$ の最小値が存在することはわかっているので $x=-1$ の時に $f(x,-1)$ は最小値を取る．$f(x,-1)$ はこれ以外，極値を取らないので最大値は存在しない．

以上をまとめると次のようになる．

- $r+1\geq 0$ $(r\geq -1)$ のとき，$f(x,r)$ は最小値のみを持ち，最大値は持たない
- $r+1<0$ $(r<-1)$ のとき，$f(x,r)$ は最大値のみを持ち，最小値は持たない

授業においてこの問題を生徒にやらせる場合には，もちろん手で解法を導かせることになるが，この解法では (3) の式変形がキーとなっており，この式変形は $r = -1$ を境に最大値，最小値の状況が変化するという知識がなければなかなか思いつかない．つまり，解答がすでに予想がついている場合にしか使えない解法であり，授業時には適切にヒントを与えることが必要である．

それに対し，数式処理システムによる解法は事前の解の知識を必要とせず，QE に関する知識さえあれば迅速にかつ正確に解を求めることができる．このように数式処理システムは問題の解答を調べるときの強力な道具となりうるので，探究的な活動に適した問題作成に非常に有用である．ただし，QE では解答のみが出力されるので，これをそのままの形では授業で活用することはできない．QE で計算した解答を元に人が問題を解く方法を導く必要がある．以上より，探究的な活動に適した（特に難易度の高い）問題作成には次のステップが有効であると考えられる．

(1) 適当に問題を設定する（この時点では解答はわからなくて良い）．
(2) 問題作成者が数式処理システムを用いて，解答を計算する．
(3) 問題作成者が数式処理システムより得られた解答をヒントとして，人が問題を解く方法を導き，それを元に生徒に与えるべき適切なヒント（例えば，本稿の問題 3 に対しては (3) 式や (AC−CB) が x の関数として有界であること）を考える．

4.3.3 問題の内容評価

この問題は「問題の教材」の所で述べたように，学習者の学習活動が入れ子構造になると考えられ，ハードルの高い問題である．学習活動の 4 つのステップのうち，比較的容易に行えるのは (1)「課題の設定」のみで，(2)「情報の収集」では，$\mathrm{AC} + r\mathrm{CB}$ の最大値，最小値が存在する r の範囲を調べるために，r の値を色々と変えながら内側の学習活動のステップ (2-a), (2-b), (2-c), (2-d) を行う必要がある．教材を用いることで (2-c) で予想を立てることはやりやすくはなるが，これはあくまで予想であることに注意する必要がある．例えば，$r = -1.01$ のとき $y = f(x, r)$ のグラフは図 12 のようになる．このグラフは $x = -1$ 付近で極値を取るが，この極値の周辺のみを見るとこの値が最小値であるかのように感じられる．実際，$r = -1$ のとき $f(x, r)$ は $x = -1$ で最小値を取るが，$r < -1$ のときは図 12 のグラフから分かるように「$x \to -\infty$ のとき $f(x, r) \to -\infty$」となっている（先に述べたように，図から得られる直感的な予想は必ずしも正しいとは限らない）．故に正しい結論を得るためにはステップ (2-d) での検証が不可欠であり，このためには図の観察以外（図の観察から得られるのはあくまで予想) の手段，具体的には数式の計算が必要となる (学習者がグラフ描画ソフトウェアや数式処理システムを使えれば，このステップの助けになるであろう)．

次の (3)「整理・分析」では，上の (2) のステップで収集した情報に基づき，最小値，最大値を取る r の範囲を予想するが，ここが正確に行えるかどうかは，(2)「情報の収集」で調べた情報の正確性がキーとなる．解答にある r の範囲はシンプル（最小値は $r \geq -1$，最大値は $r < -1$ で存在）なので (2)「情報の収集」での情報が正確ならば，解の予想はそれほど難しくないと思われる．

最後の (4)「まとめ・表現」では，(3)「整理・分析」で立てた予想の証明を行う．ここも (2)「情報の収集」で調べた情報の正確性が必要となるが，その情報を元に (3) の式変形を行う発想

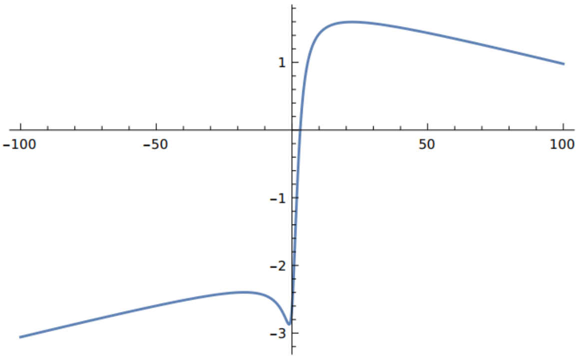

図 12：$r = -1.01$ のときの $y = f(x, r)$ のグラフ

表 1: 各問題の校種

問題	必要な知識	校種	備考
問題 1	三角の合同条件	中学 2 年	
問題 2	三角の不等式（数学 IA）	高校 1 年	学力次第で中学校でも可
問題 3	解析学	大学低年次	学力次第で高等学校でも可

も必要である．よって，学習者がここで止まっている場合は，(3) の式変形をヒントとして提示する必要がある．

4.4　各問題の性質の比較

表 1 に問題 1,2,3 を解くために必要な知識と対応する校種を示す．表 1 の備考で示したように，表 1 の校種の線引は曖昧なところがある．問題 2 で必要な三角不等式は正式には高等学校の数学 IA で「三角形の成立条件」として学ぶことになっているが，直感的にわかりやすい不等式なので学力の高い生徒ならば中学生でも十分理解できると思われる．また，問題 3 では「最大値・最小値の定理」が必要なので大学低年次に分類したが，「最大値・最小値の定理」も直感的にわかりやすい定理なので高校生でも問題 3 を理解できる生徒は多いと思われる（ただし，$f(x, r)$ の微分の計算等は必要なので数学 III は必要である）．

表 2 に問題 1,2,3 の (1)〜(4) における各ステップの難易度を示す．問題 1 は正の値しか取らないが，問題 2, 問題 3 は負の値も取りうる．そこで「課題の設定」のステップの難易度を表 2 のように設定した

表 2: 各問題の性質

問題	課題の設定	情報の収集	整理・分析	まとめ・表現
問題 1	容易	容易	難	普通
問題 2	普通	容易	容易	難
問題 3	普通	難	普通	難

動的幾何ソフトウェアを用いることで，問題 1, 問題 2 の「情報の収集」のステップは容易にできるようになったが，問題 3 においてはここは入れ子構造となっており，更に「課題の設定」「情報の収集」「整理・分析」「まとめ・表現」の４つのステップが入るようなっているため難易度は高い．

表の列の項目を見ると，「情報の収集」「整理・分析」「まとめ・表現」の欄では「難」が入っている問題が 1 つはあるため，問題 1,2,3 を解くことで各ステップをバランス良く学ぶことができる．

5 終わりに

小中高の各段階における「探究的な学習」に注目が集まっているが，動的幾何ソフトウェアを用いた教材は「探究的な学習」を促すための１つの有力な手段である．動的幾何ソフトウェアは，「探究的な学習」の４つのステップのうち，特に「情報の収集」に対して効果があると考えられるが，動的幾何ソフトウェアを用いて得られることはあくまで予想であり，それを最終的な解答とするためには得られた予想を証明することが必要である．数式処理システムによる厳密な計算はこの段階で効果を発揮するので，動的幾何ソフトウェアと数式処理システムの組み合わせは探究的な問題に対する強力な道具となりえる．

本稿では，一連の幾何の問題（問題 1,2,3）とそれを解くための教材を提案した．提案した教材では動的幾何ソフトウェアを活用しており，学習者の探究的な学習を手助けするように設計されている．これらの問題に対して，「探究的な学習」の４つのステップ「課題の設定」「情報の収集」「整理・分析」「まとめ・表現」に照らし合わせた分析を行った結果，最も難しい問題 3 は「情報の収集」のステップの所に更に「課題の設定」「情報の収集」,「整理・分析」「まとめ・表現」の４つのステップを含む入れ子構造を持つことがわかった．また，問題 1,2,3 の (1)〜(4) における各ステップの難易度の表（表２）を作成したところ，各ステップにおいて「難」が入っている問題が 1 つはあったので，問題 1,2,3 を解くことで各ステップをバランス良く学ぶことができると考えられる．

今後は，さらに「探究的な学習」に向いた問題とそのための教材を考えていきたい．今回，問題 3 で見た４つのステップの入れ子構造は他の問題でもありうると考えられるので，他の問題で４つのステップの構造がどの様になるかを見ていきたい．また，今回，動的幾何ソフトウェアと数式処理システムの組み合わせが有効であることを見たが，この２つのシステムのさらなる連携を模索して行きたい．これらが今後の課題である．

参 考 文 献

[1] 小学校学習指導要領（平成 29 年告示）, 文部科学省, 2017.
[2] 中学校学習指導要領（平成 29 年告示）, 文部科学省, 2017.
[3] 高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）, 文部科学省, 2018.
[4] 文部科学省「今，求められる力を高める総合的な学習の時間の展開」第 2 章 ：URL http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/detail/__icsFiles/afieldfile/2013/08/01/1338358_3.pdf （2021 年 10 月閲覧）

[5] 小松孝太郎 : 科学研究費助成事業研究成果報告書「動的幾何ソフトウエアを活用した協同型探究活動を促進する教材系列の開発と検証」, URL https://kaken.nii.ac.jp/ja/file/KAKENHI-PROJECT-15H05402/15H05402seika.pdf （2021 年 10 月閲覧）

[6] D. コックス,J. リトル,D. オシー：グレブナ基底と代数多様体入門〈下〉, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2000.

[7] 森継修一, 荒井千里：グレブナー基底による幾何定理の代数的証明の効率について, 日本応用数理学会論文誌, **17**(2), 2007, 183-193.

[8] 佐藤洋祐 : 初等幾何学の階層付けと自動定理証明, 数理解析研究所講究録（数式処理研究の新たな発展）, **1976**, 2015, 52-61.

[9] 穴井宏和, 横山和弘: QE の計算アルゴリズムとその応用—数式処理による最適化, 東京大学出版会, 2021.

[10] 岩根秀直, 穴井宏和: 数式処理による入試問題への挑戦, Fujitsu, **66**(4), 2015, 19-25.

[11] 国立情報学研究所ニュースリリース：東大２次模試の数学で偏差値 76.2 を記録！, URL https://www.nii.ac.jp/userimg/press_20161114-2.pdf (2021 年 10 年閲覧)

[12] CinderellaJapan 公式ホームページ：URL https://sites.google.com/site/cinderellajapan/（2021 年 10 月閲覧）

[13] GeoGebra 日本 公式ホームページ：URL https://www.geogebra.org/?lang=ja（2021 年 10 月閲覧）

[14] GC Resource Center：URL http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/（2021 年 10 月閲覧）

[15] KSEG - KnxmWiki：URL http://www.mathlibre.org/wiki/index.php?KSE （2021 年 10 月閲覧）

[16] Cabri 公式ホームページ：URL https://cabri.com/en/ （2021 年 10 月閲覧）

[17] 北本卓也, 山根靖弘 : 動的幾何ソフトウェアを用いた教材作成に関する研究, 山口大学教育学部学部・附属教育実践研究紀要, **13**, 2014, 83-88.

[18] Kaneko M., Yamashita S., Kitahara K., Maeda Y., Nakamura Y., Kortenkamp U., Takato S.: KETCindy— Collaboration of Cinderella and KETpic, Reports on CADGME 2014 Conference Working Group, The International Journal for Tech - nology in Mathematics Education, **22**(4), 2015, 179 - 185.

[19] 金子真隆 : CindyJS によるアクティブラーニングの可能性, 数理解析研究所講究録（数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究）, **2022**, 2017, 48-58.

[20] 大西俊弘 : GeoGebra における「軌跡の方程式を求める機能」の課題, 数理解析研究所講究録（数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究）, **1951**, 2015, 122-135.

[21] 愛知教育大学 飯島研究室 GC 代表的な問題 ： URL http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_rc/typical_problems_index.htm （2021 年 10 月閲覧）