数式処理 *Bulletin of JSSAC(2016)*
Vol. 22, No. 1, pp. 1 - 2

巻頭言

加速法 事始め
ゴールドバッハの elementary method に寄せて

松本 茂樹 *

甲南大学 知能情報学部

アンドレ・ヴェイユの『数論　歴史からのアプローチ』（足立恒雄・三宅克哉訳，日本評論社，1987 年）を繙くと，「バーゼル問題（平方数の逆数和 $\zeta(2)$ を求める問題）」を巡る興味深い数学史の一齣を窺い知ることが出来る．周知のように，$\zeta(2)$ の求和問題は 1644 年にピエトロ・メンゴリによって提起され 1735 年にレオンハルト・オイラーによって解決された．ヴェイユの書は，オイラーが $\zeta(2)$ の厳密値 $\pi^2/6$ に辿り着くまでの謂わば問題解決 “ 前夜” の（$\zeta(2)$ の近似値を模索する）様子を以下のように書き記している．

「1728 年 8 月 29 日に，ダニエル・ベルヌーイ（ヨハン・ベルヌーイの次男）は $\zeta(2)$ の和は「1.6 に極めて近い」とゴールドバッハに宛てて書いている．ゴールドバッハは，<u>初等的方法 (elementary method)</u> を用いて，$\frac{41423}{25200} < \zeta(2) < \frac{76997}{46800}$ (したがって $\zeta(2)$ は 1.6437 と 1.6453 の間にある) と答えている (1729 年 1 月 31 日，ゴールドバッハ 38 才)．当時オイラーはすでにペテルブルグにいて，ダニエルとは毎日のように接触があったから，こうした交信を知っていたに違いない．まもなく彼はアカデミーに一論文を提出するが，この論文は <u>積分計算の巧みな応用</u>(ingenious application of integral calculus) によって得られた $\zeta(2)$ に対するはるかに良い評価 1.644934 でもって締めくくられている (1731 年，オイラー 24 才).」（註：拙稿の筆者による下線等，若干の加筆箇所有り.）

ヴェイユがいう「（オイラーによる）積分計算の巧みな応用」とは，等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (\log 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^{n-1}} \tag{1}$$

の導出を指し，確かにこの等式の右辺は，第 2 項の級数を第 17 部分和までとると 1.644934 を上回る．（ちなみに，第 26 部分和で小数第 10 位，第 58 部分和で小数第 20 位までの $\zeta(2)$ の近似値に達する.）一方，ゴールドバッハが導いた $\zeta(2)$ の評価は，不等式

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{7}{16}\right)\left(k + \frac{9}{16}\right)} < \zeta(2) < \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k + \frac{1}{2}\right)} \tag{2}$$

*shigeki@konan-u.ac.jp

に基づくものである．ゴールドバッハは不等式 (2) の形で $\zeta(2)$ の値を絞り込むのであるが，彼のアイデアの勘所は $\zeta(2)$ の近似値を「無限和 $\sum_{k=1}^{\infty} 1\Big/k^2$ のある番号 n から先の部分 $\sum_{k=n+1}^{\infty} 1\Big/k^2$ を $\sum_{k=n+1}^{\infty} 1\Big/\Big(k^2-(1/2)^2\Big)$ のような "和の求まる級数（による近似）" で置き換えて」計算している点である．すなわち，ゴールドバッハの方法とは収束緩慢な部分和 $\sum_{k=1}^{n} 1\Big/k^2$ に補正項 $\sum_{k=n+1}^{\infty} 1\Big/\Big(k^2-(1/2)^2\Big) = 2/(2n+1)$ を添加することで収束の加速を図る術と見ることが出来る．

この方法で $\zeta(2)$ のオイラー並の近似値 1.644934 が得られることを確かめてみよう．そのために， $1\Big/k^2$ のより精密な近似式 $(4/3)\Big/\Big(k^2-(1/2)^2\Big)-(1/3)\Big/\Big(k^2-1\Big)$ から得られる補正項 $8/(6n+3)-1/(6n)-1/(6n+6)$ で部分和 $\sum_{k=1}^{\infty} 1\Big/k^2$ を加速してみると，$n = 20$ で $\zeta(2)$ の近似値 $\underline{1.64493405}304969$ が得られることがわかる（下線は厳密値との一致を示す）．ちなみに，項数をもう一つ増やした近似式 $\sum_{i=1}^{3} a_i/\Big(k^2-(i/2)^2\Big)$ を用いれば以下の補正が得られる．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{3}{10}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{15}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+3}\right) + \frac{46}{15(2n+1)} \tag{3}$$

この式で $n = 20$ として得られる $\zeta(2)$ の近似値 $\underline{1.644934066}901$ は（計算の手間からいえば）悪くない値である．

先述のヴェイユの書には，オイラーが 1730 年代から 1740 年代にかけてオイラー-マクローリンの公式を（発見し）工夫を重ねながら用いて $\zeta(n)$ $(n = 2, 3, ..., 16)$，円周率 π ,「オイラー定数 γ (Euler-Mascheroni constant, Euler's gamma)」等の近似値を十数桁〜20 桁の精度で求める数値計算を「大いに楽しんでいた」様子が記されている．

ここでは，オイラー定数 γ 及び円周率 π に関して，ゴールドバッハの方法で求めた補正項の一例を書き留めておこう．（高精度の補正に関しては紙面の都合で割愛する．）

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{\log n + \log(n+1)}{2} + \frac{1}{180}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right) + \frac{11}{60}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) \to \gamma \tag{4}$$

$$4\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^n}{8}\left(\frac{10}{n}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) \to \pi \tag{5}$$

後者は，見ての通り円周率 π に関するグレゴリ級数（Madhava-Gregory series）にゴールドバッハの方法を当て嵌めたもので，(5) の補正はマーダヴァ (1340-1425) の第 2 補正と同程度の精度を実現するものである．

グレゴリ級数の加速に関しては，オイラー変換 (1755) による方法も有名であり，また近年の話題としては第 5000000 部分和に関する J.R.North の "気付き"(1988) や Borwein and Bailey の結果 (2003)

$$\pi = 4\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_{2m}}{4^m n^{2m+1}} \quad (E_i\text{はオイラー数}) \tag{6}$$

を挙げることが出来る．筆者は 1970 年代の「数学セミナー」に System5（という知る人ぞ知る "5 人組"）が連載していた記事から以下のことを学んだ記憶がある．

「円周率の近似値 $4\sum_{k=1}^{10^N} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ は小数第 N 位が 1 だけ少なく，それを修正すれば約 $3N$ 桁正しい値を与える」

加速法について繙き始めたところで忽ち紙面が尽きた．雑文たるを詫びつつ筆を擱く．