

# Bounded Cylindrical Algebraic Decomposition による Quantifier Elimination の効率化

岩根 秀直\*

(株)富士通研究所

## 概 要

With many applications in engineering and scientific fields, quantifier elimination (QE) has received increasing attention. Cylindrical algebraic decomposition (CAD) is used as a basis for a general QE algorithm. In this paper we present an effective symbolic-numeric cylindrical algebraic decomposition algorithm which constructs CAD only in restricted admissible regions to remove redundant projection factors and avoid lifting cells where truth values are constant over the region. We call such a CAD a *bounded CAD*. The effectiveness of the bounded CAD approach is examined in a number of experiments including practical engineering problems, which also reveal the quality of the implementation. Experimental results show that our implementation has significantly improved efficiency compared with our previous work.

## 1 はじめに

限量記号消去アルゴリズム (quantifier elimination (QE) algorithm) とは, 与えられた形式的理論 (formal theory) について「限量記号付きの式 (一階述語論理式)」を入力とし「等価で限量記号無しの式」を出力するアルゴリズムのことである. QE は, 一階述語論理式によって表現される広い範囲の重要な応用問題をシステムティックに取り扱うことが可能であるため, 計算機科学や各種の理工学分野の研究者が QE を活用するようになっている.

**Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD)** [4] は, 与えられた有理数係数の多項式集合に対して, 変数空間を多項式の符号が不変である部分集合に分割する手法で, QE 問題の効率的な解法の一つである. 現在でも CAD アルゴリズムが QE アルゴリズムの中心であり, QE 問題を解く場合に不要な計算を回避する方法 [5] やより少ない射影因子を生成する射影演算 [10, 16, 2], 代数拡大体上での演算を数値手法に置き換える方法 [6, 1, 22, 13], 入力の一階述語論理式を制限する方法 [15, 17, 21, 18] など多くの研究が行われている.

一方で, QE アルゴリズムの計算量の下限は限量記号がついた変数の数に対して二重指数であることが示されている [7]. そのため, 限量記号がついた変数について線形の入力に対する手法など入力の一階述語論理式を制限することで効率化を実現した専用 QE が提案されている

\*iwane@jp.fujitsu.com

[23, 11, 14, 24, 9]. また, 一種類の限量記号のみの一階述語論理式を入力とするアルゴリズム [12] も提案されている. このアルゴリズムは入力を制限するだけでなく, 出力に対して, 測度が 0 の誤差を許すことで効率化を実現している. しかし, QE により正確な解を求めることはさまざまな場面で必要とされており, 任意の一階述語論理式を正確に解ける CAD の効率化は現在でも重要である.

多項式最適化問題を QE を利用して解く場合など, QE 問題によくみられる特徴として, 入力の一階述語論理式を数値手法を用いて評価することで変数空間の部分集合に対して真偽値を確定できることがある. その結果を利用すれば変数空間全体の CAD を構築することなく入力の一階述語論理式の真偽値を求めることができる. 本論文では, 入力の一階述語論理式の真偽値を数値手法で確定できなかった領域のみの CAD を構築することで効率化を実現した bounded CAD について述べる.

本論文の構成は以下の通りである. 2 章において本論文で必要となる定義を準備する. 3 章において QE と多項式最適化について説明を行う. 4 章では, CAD アルゴリズムの流れについて紹介する. 5 章で CAD による QE の効率化のために提案する bounded CAD について述べ, 6 章で bounded CAD の実装方法について述べる. 7 章で計算機実験による bounded CAD 手法の効果について考察する. 最後に 8 章でまとめと今後の課題について述べる.

## 2 準備

本章では, 本論文で必要となる定義を行う.

### 記法 1

実数体, 有理数体をそれぞれ  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  と表記する.

### 定義 2

有理数係数の多項式の不等式または等式を原子論理式 (atomic formula) と定義する.

### 定義 3

有限個の原子論理式の論理積, および, それらの有限個の論理和として表される集合のことを半代数的集合 (semi-algebraic set) と定義する.

### 定義 4

$f(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$  を定数でない多項式とすると,  $x_k$  の次数が正となる最大の整数  $k$  を  $f$  のレベル (level) と定義する.

### 定義 5

空でない連結した  $\mathbb{R}^k$  の部分集合を領域 (region) と定義する.

### 定義 6

実数  $\alpha$  に対して,  $\text{sgn}(\alpha)$  で  $\alpha$  の符号 (sign) を表すことにする. ここで, 符号とは正, 負, 0 のいずれかをいう.

次に多項式の集合  $F = \{f_1, \dots, f_n\} \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$  と  $\alpha \in \mathbb{R}^k$  に対して,  $\text{sgn}_\alpha(F) = (\text{sgn}(f_1(\alpha)), \dots, \text{sgn}(f_n(\alpha)))$  と定義する.  $\mathbb{R}^k$  の領域  $c$  において, 任意の  $\alpha, \beta \in c$  に対して,  $\text{sgn}_\alpha(F) = \text{sgn}_\beta(F)$  が成り立つとき,  $c$  は  $F$ -符号不変であるという.

### 3 QE と多項式最適化

本章では QE アルゴリズムと QE による多項式最適化問題の解法について述べる.

限量記号消去アルゴリズム (quantifier elimination (QE) algorithm) とは, 与えられた形式的理論 (formal theory) について「限量記号付きの式 (一階述語論理式)」を入力とし「等価で限量記号無し of 式」を出力するアルゴリズムのことである. 例えば

$$\exists x (ax^2 + bx + c = 0) \quad (1)$$

に対して, QE は  $x$  が無い等価な論理式

$$(a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0) \quad (2)$$

を返す.

最適化問題は以下のように定式化される.

$$\text{Minimize } f(x) \text{ subject to } \psi(x)$$

ここで,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  は決定変数のベクトル,  $f$  は目的関数,  $\psi$  は制約条件と呼ばれる. 本章では,  $f$  が有理数係数の多項式で,  $\psi$  が半代数的集合である多項式最適化問題を扱う. QE を用いると, 多項式最適化問題を正確に解くことができる.

多項式最適化問題の目的関数の実行可能集合は新しい変数  $y$  を用いて, 次のように表すことができる.

$$\exists x (y = f(x) \wedge \psi(x)) \quad (3)$$

この一階述語論理式 (3) に QE を適用すると, 変数  $x$  を消去し  $y$  に関する実行可能集合, つまり目的関数の取りうる値の集合を得ることができる. さらに, この結果を利用すれば最適値や最適値を与える最適解を表す一階述語論理式を構築でき, QE により正確な論理式表現を求めることができる.

#### 例 7

以下の最適化問題を考える.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } -x_1 - x_2 \\ &\text{subject to } x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

目的関数の実行可能集合は以下のように定式化される.

$$\exists x_1 \exists x_2 (y = -x_1 - x_2 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_1^2 + x_2^2 \leq 1)$$

QE を用いて決定変数  $x_1, x_2$  を消去すると, 以下のような論理式を得る.

$$y^2 \leq 2 \wedge y \leq 0$$

これにより, 与えられた問題の最適値が  $-\sqrt{2}$  であることが得られる.

## 4 CAD アルゴリズム

本章では CAD アルゴリズムについて簡単に紹介する。

1975 年に, G. E. Collins が, 与えられた多項式集合に対して変数空間を各多項式の符号が不変である互いに交わらないセル (cell) と呼ばれる領域に分割する新しい代数的方法である **Cylindrical Algebraic Decomposition** (CAD) [4] を提案し, CAD による QE アルゴリズムを提案した。

CAD アルゴリズムは射影段階 (projection phase), 底段階 (base phase), 持ち上げ段階 (lifting phase) の 3 つの段階から構成される。CAD アルゴリズムの入力は有限個の多項式集合  $F \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$  である。射影段階では,  $F_r := F$  に射影演算 PROJ を繰り返し適用して, 多項式集合列  $\{F_i\}_{i=1, \dots, r-1}$  を計算する。  $F_{i+1} \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{i+1}]$  に射影演算 PROJ を適用すると, 一変数消去された  $F_i \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_i]$  を得られる。  $\{F_i\}_{i=1, \dots, r}$  に含まれる多項式の既約因子分解により得られる多項式集合を射影因子という。底段階では,  $F_1$ -符号不変となるように  $\mathbb{R}(= \mathbb{R}^1)$  の分解を行う。これは射影段階で得られた一変数多項式の集合  $F_1$  の実根の分離により求める。最後の持ち上げ段階では,  $\mathbb{R}^k$  の分解  $\mathcal{D}_k$  と  $F_{k+1}$  を用いて  $\mathbb{R}^{k+1}$  の分解  $\mathcal{D}_{k+1}$  を構築する ( $k = 1, \dots, r-1$ )。CAD により得られるセルでは多項式集合の符号が一定なので, セル内の任意の一点の符号を評価すればセル全体での符号を得られる。この代表点は標本点 (sample point) と呼ばれる。標本点の各座標は代数的数として取ることができ, 定義多項式とその根を唯一つ含む分離区間 (isolating interval) を用いて表現する。例えば,  $\sqrt{2}$  は  $\{x^2 - 2, [1.4, 1.5]\}$  というように表現する。図 1 は CAD アルゴリズムの流れを表している。

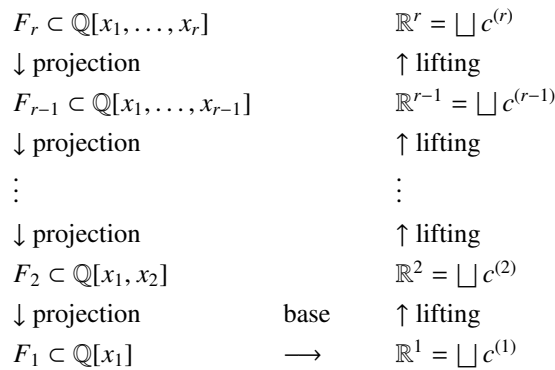


図 1: CAD アルゴリズムの流れ

## 5 bounded CAD アルゴリズム

一階述語論理式のうち例えば一変数で構築されるものなど部分原子論理式を数値手法を用いて評価することで, 一部の領域に対して与えられた一階述語論理式全体の真偽値を正確に決定できることがある。例えば, ものづくりにおける最適化問題では, 決定変数は長さや幅を表し変数の値は正であるとか, 指定された範囲を動くというような制約を与えられることがある。決定変数に範囲制約のあるような最適化問題を QE を用いて解く場合, 与えられた範囲外の領域は制約

条件を満たさないので，入力の一階述語論理式は偽となる．このように，前処理として一階述語論理式を数値手法を用いて評価することで変数空間全体に対する記号計算を回避できる．本章では，変数空間全体で CAD を構築するのではなく，数値手法で決定できなかった領域のみで CAD を構築することにより効率化を実現した **bounded CAD** について述べる．

以下では，入力の一階述語論理式を

$$\varphi(x_1, \dots, x_r) = Q_{q+1}x_{q+1} \cdots Q_r x_r (\psi(x_1, \dots, x_r)) \quad (4)$$

とし，領域  $\mathcal{U}_r \subseteq \mathbb{R}^r$  上での CAD の構築を考える．ここで， $Q_i \in \{\exists, \forall\}$  で， $\psi$  は限量記号がない論理式であり，領域  $\mathcal{U}_r$  の射影

$$\mathcal{U}_i = \{(x_1, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^i \mid \exists x_{i+1}(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{U}_{i+1}\} \quad (i = 1, \dots, r-1)$$

もまた領域であるとする．

### 5.1 射影段階

射影段階では射影演算を繰り返し適用することで一変数多項式の集合  $F_1$  を得る．射影段階で生成された射影因子の数が射影段階，底段階，および持ち上げ段階と計算すべての段階に影響する．したがって，射影因子の削減が CAD 計算における最も効率的な方法のひとつである．そのためこれまで少ない数の射影因子を生成するさまざまな射影演算 [10, 16, 2] が提案されている．さらに射影因子数を削減するために，等式制約を持つ場合など特別な入力に対する射影演算 [17, 18, 21] も提案されている．

しかし，これまでに提案されている射影演算は，変数空間全体を分割するために必要となる射影因子を生成するため， $\mathcal{U}_r$  上での CAD の構築には不要な射影因子が存在することがある．ここでは，これまで提案されている射影演算が生成する射影因子から bounded CAD 構築には不要な射影因子を削減することにより QE 計算の効率化を実現する手法を提案する．最初に例を用いて，bounded CAD の構築により，これまで提案されている射影演算により生成される射影因子から不要な射影因子が削減できることを示す．

#### 例 8

入力の一階述語論理式を  $\varphi(x, y) = \exists y (x^2 + y^2 < 1 \wedge x \geq 0)$  とする． $\varphi$  に含まれる多項式列  $F_2 = \{x^2 + y^2 - 1, x\}$  を抽出し，CAD アルゴリズムを適用する．射影段階では射影演算により  $y$  を消去し， $F_1 = \{x + 1, x, x - 1\}$  を得る．底段階では  $F_1$  に属する一変数多項式の実根を求めることにより， $\mathbb{R}$  をそれぞれの領域が  $F_1$ -符号不変である  $\{x < -1\}, \{x = -1\}, \{-1 < x < 0\}, \{x = 0\}, \{0 < x < 1\}, \{x = 1\}, \{x > 1\}$  の 7 つのセルに分解する．

従来の射影演算では  $F_1 = \{x + 1, x, x - 1\}$  が得られるが，入力の論理式  $\varphi$  には条件  $x \geq 0$  があり  $x < 0$  では  $\varphi$  が偽であることが自明なので， $x < 0$  の領域で CAD を構築する必要はない．つまり，底段階において  $x < -1, x = -1, -1 < x < 0$  に分解する必要がなく， $\mathcal{U}_2 = \{x \geq 0\}$  上での CAD の構築には， $x + 1$  は不要な射影因子である．

この例のように入力の一階述語論理式の真偽値が自明でない領域のみを CAD 構築の対象とすることで射影因子の数の削減を実現できる．

CAD の出力は入力が多項式集合が符号不変となるセル分割である．このことから，以下の補題が成立する．

#### 補題 9

$F_r \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$  を有限個の多項式集合， $\mathcal{D}_r$  を  $F_r$ -符号不変となる  $\mathbb{R}^r$  のセル分割， $g \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$  を変数空間上のすべての点  $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$  で 0 にならない多項式とする．このとき，任意のセル  $c \in \mathcal{D}_r$  に対して  $(F_r \cup \{g\})$ -符号不変である．

補題 9 は， $F_r$  から得られる CAD は  $F_r \cup \{g\}$  の CAD になっており，変数空間全体で符号が一定である多項式は射影因子として不要であることを述べている．bounded CAD の構築においても同様のことがいえる．

#### 補題 10

$F_r \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$  を有限個の多項式集合， $\mathcal{U}_r \subseteq \mathbb{R}^r$  をその射影も連結となるような領域， $\mathcal{D}_r$  を  $F_r$ -符号不変となる  $\mathcal{U}_r$  のセル分割， $g \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$  をすべての点  $(x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{U}_r$  で 0 にならない多項式とする．このとき，任意のセル  $c \in \mathcal{D}_r$  に対して  $(F_r \cup \{g\})$ -符号不変である．

Algorithm 1 は補題 10 を利用した bounded CAD 用の射影演算 BPROJ である．PROJ は変数空間全体を対象とする [10] などの射影演算を表す．BPROJ は他の射影演算結果である入力が多項式集合  $F_k$  から  $\mathcal{U}_k$  上で 0 にならない多項式，つまり  $\mathcal{U}_k$  上での bounded CAD の構築に不要となる射影因子を取り除く．

---

#### Algorithm 1 BPROJ( $F_k, \mathcal{U}_k, x_k$ )

---

**Input:** 有限個の多項式集合  $F_k \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$  ( $k > 1$ )， $F_k$  に属する多項式で構成される半代数的集合で表現される連結した閉集合  $\mathcal{U}_k \subseteq \mathbb{R}^k$ ，主変数  $x_k$ ．

**Output:**  $\mathcal{U}_k$  上の CAD 構築に必要な射影因子  $F_{k-1}$

```

1:  $G \leftarrow \emptyset$ 
2: for  $f(x_1, \dots, x_k) \in F_k$  do
3:   if  $\exists x_1 \cdots \exists x_k ((x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{U}_k \wedge f(x_1, \dots, x_k) = 0)$  then
4:      $G \leftarrow G \cup \{f(x_1, \dots, x_k)\}$ 
5:   end if
6: end for
7:
8: return PROJ( $G, x_k$ )

```

---

ここで，与えられた一階述語論理式の真偽値が不明となる領域の射影は入力論理式から得られるので， $\mathcal{U}_k$  が  $F_k$  から構成されるのは自然な設定である． $\mathcal{U}_k$  の境界を表現する多項式は必ず射影因子に含まれ， $c \in \mathcal{D}_k$  が  $c \cap \mathcal{U}_k \neq \emptyset$  を満たすとき， $c \cap \mathcal{U}_k = c$  が成立することに注意する．また，入力の一階述語論理式に冗長な原子論理式が含まれることがあるので，CAD アルゴリズムの入力である  $F_r := F$  に対しても射影因子が  $\mathcal{U}_r$  上で符号一定でないか調べる必要がある．

る．射影演算  $B_{\text{PROJ}}$  は  $F_1$  における不要な射影因子の除去は行わないが，底段階で同等の処理を実現する．

射影演算  $B_{\text{PROJ}}$  では，多くの QE 問題を解く必要があり，その効率的な実装が重要となる．

## 5.2 底段階

本節では，底段階において bounded CAD の構築には不要なセルの構築を削減する方法について述べる．

底段階では  $F_1$ -符号不変となる  $\mathbb{R}$  の CAD 構築に必要な実根の分離を行う．得られた実根の分離区間と真偽値が不明な領域  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}$  の積集合が空集合の場合には，そのセルを構築する必要がない．Algorithm 2 は  $\mathcal{U}_1$  上での bounded CAD 構築に不要となるセルを削減した  $\mathbb{R}$  の CAD 構築方法を表す．

---

### Algorithm 2 $B_{\text{BASE}}(F_1, \mathcal{U}_1)$

---

**Input:** 多項式集合  $F_1 \subset \mathbb{Q}[x_1]$ , 領域  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathbb{R}$

**Output:**  $\mathcal{U}_1$  上で  $F_1$ -符号不変となる CAD

$L \leftarrow \prod_{f \in F_1} f$  の実根 (定義多項式と分離区間で表現される)

$J \leftarrow \emptyset$

**for**  $\{f, [l, h]\} \in L$  **do**

**if**  $[l, h] \cap \mathcal{U}_1 \neq \emptyset$  **then**

$J \leftarrow \{f, [l, h]\}$

**end if**

**end for**

**return**  $J$  から構築される  $\mathbb{R}$  の CAD

---

ここでのセルの削減は Algorithm 1 における QE 問題を解いていることに相当し，射影段階で生成された射影因子の集合  $F_1 \subset \mathbb{Q}[x_1]$  から bounded CAD の構築には不要な射影因子を削減することに同等であることに注意する．通常の底段階の処理で必要となる実根の分離区間を利用できるため，Algorithm 1 よりも容易に不要なセルを削減できる．

## 5.3 持ち上げ段階

本節では，bounded CAD 構築における持ち上げ段階の効率化手法について述べる．

持ち上げ段階は，代数拡大体上での無平方因子分解（または既約因子分解）や実根の分離計算が必要であり，最も計算時間がかかる段階の一つである．持ち上げ段階の効率化のために代数拡大体上での実根の分離演算を数値計算で実現する方法 [6, 1, 22, 13] が提案されている．

また，持ち上げ段階の効率化のため，持ち上げるセルの数を削減する partial CAD [5] と呼ばれる手法が Collins らにより提案されている．そこでは入力の一階述語論理式の真偽値情報を利用する trial evaluation と呼ばれる手法が用いられる．

例を用いて，partial CAD で提案されている trial evaluation を説明する．以下の一階述語論理式を考える．

$$\varphi(x_1, x_2) = \exists x_2 (\psi_1(x_1) \wedge \psi_2(x_1, x_2))$$

ここで,  $\psi_1, \psi_2$  は限量記号を持たない論理式である. 今, 底段階で  $\mathbb{R}$  の  $F_1$ -符号不変な CAD  $\mathcal{D}_1$  が得られているとし, セル  $c \in \mathcal{D}_1$  を持ち上げることを考える.  $c$  は  $F_1$ -符号不変であり,  $F_1$  に属する各多項式の  $c$  上での符号は既知である. また,  $\psi_1$  に現れる多項式はすべて  $F_1$  に含まれる. したがって,  $\psi_1$  の  $c$  上での真偽値が正確に判定可能である. このとき,  $\psi_1$  が  $c$  上で偽であれば, 任意の実数  $x_2$  に対して  $\varphi(x_1, x_2)$  が偽になることが確定するため, セル  $c$  の持ち上げを回避することができる.

この例のように partial CAD では, 入力の一階述語論理式の実偽値を得られている情報で判定し, 真偽値が決定できた場合には持ち上げを回避することを行う. trial evaluation は以下の補題を利用している.

#### 補題 11

$c$  を  $\mathbb{R}^k$  の分割  $\mathcal{D}_k$  のセル ( $1 \leq k < r$ ),  $s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k$  を  $c$  の標本点とする. もし,  $\varphi(s_1, \dots, s_k, x_{k+1}, \dots, x_r)$  の真偽値が一定であるならば,  $c$  の持ち上げは不要である.

Collins らにより提案された trial evaluation では  $\mathcal{D}_k$  のセルに trial evaluation を適用するとき, レベルが  $k$  以下の多項式から構成される原子論理式のみを対象としている.

bounded CAD 構築時には, 以下の補題が適用できる.

#### 補題 12

$c$  を  $\mathbb{R}^k$  の分割  $\mathcal{D}_k$  のセル ( $1 \leq k < r$ ),  $s = (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k$  を  $c$  の標本点とする. もし,  $\varphi(s_1, \dots, s_k, x_{k+1}, \dots, x_r)$  の真偽値が  $\mathcal{U}_r$  で一定であるならば,  $c$  の持ち上げは不要である.

bounded CAD ではすべての原子論理式に対して真偽値の判定を行う. これにより, 真偽値の確定により持ち上げを回避できる可能性が高くなり, 効率化が期待できる.

## 6 bounded CAD の実装

本章では, bounded CAD の実装方法について述べる. 最初に bounded CAD の前処理として数値手法で入力の一階述語論理式を評価する方法について述べ, 次に前処理で得られた結果を利用して, 射影段階と持ち上げ段階を効率的に計算する方法について述べる.

### 6.1 数値手法による真偽値の確定

ここでは, bounded CAD 手法の前処理として一階述語論理式から数値手法を用いて真偽値が自明となる部分集合を求める. 一般に与えられた一階述語論理式  $\varphi$  の真および偽となる集合を正確に求めるのは困難である. しかし,  $\varphi$  の中に現れるいくつかの原子論理式から, 真または偽となる部分集合を求めることは容易なことがある. 例えば, 真偽値の確定が容易な原子論理式として, 一変数のみから構成される原子論理式が考えられる. 一変数の多項式であれば, 有理係数体上での無平方因子分解 (または既約因子分解) と数値手法を用いた実根の分離により, 一部の集合に対して真偽値を確定できる. Algorithm 3 は一変数多項式で構成される原子論理式の実偽値を決定する手法を表す. 一変数多項式の場合には, 実根の分離区間以外では,  $f(x)$  の符号が一定となるため, 与えられた原子論理式の実偽値を確定できる.



**Algorithm 3** EVALATOM1( $f(x) \rho 0$ )**Input:** 一変数多項式  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ,  $\rho \in \{\leq, <, =, \neq\}$ **Output:**  $f(x) \rho 0$  が真と確定する集合  $\mathcal{T}$ , 偽と確定する集合  $\mathcal{F}$  $L \leftarrow f$  の実根の分離区間 (閉区間の論理和) $\mathcal{T} = \{x \in (\mathbb{R} \setminus L) \mid f(x) \rho 0\}$  $\mathcal{F} = \{x \in (\mathbb{R} \setminus L) \mid \neg(f(x) \rho 0)\}$ **return**  $\{\mathcal{T}, \mathcal{F}\}$ 

多変数多項式で構成される原子論理式の場合にも, 真偽値を部分的に確定することが可能なことがある. 例えば, Algorithm 4 で一部の集合に対して真偽値を確定できる. ここでは, 特定の変数に着目し, 他の変数を  $\mathcal{U}_r$  の情報を用いて消去し, 区間係数一変数多項式の問題に帰着する. Algorithm 4 では区間係数一変数多項式の実根の分離に失敗した場合には, 真偽値を確定する集合を得られない.

**Algorithm 4** EVALATOM2( $f(x_1, x_2, \dots, x_r) \rho 0, \mathcal{U}_r, x_i$ )**Input:** 多変数多項式  $f(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$ ,  $\rho \in \{\leq, <, =, \neq\}$ , 領域  $\mathcal{U}_r \subseteq \mathbb{R}^r$  主変数  $x_i$ **Output:** 真と確定する集合  $\mathcal{T}$ , 偽と確定する集合  $\mathcal{F}$  $\tilde{f}(x_i) \leftarrow \text{SUBST}(f, x_i, \mathcal{U}_r)$  $L \leftarrow \tilde{f}$  の実根の分離区間 (閉区間の論理和)**if error then** $\mathcal{T} = \mathcal{F} = \emptyset$ **else** $\mathcal{T} = \{x \in (\mathbb{R} \setminus L) \mid \tilde{g}(x_i) \rho 0\}$  $\mathcal{F} = \{x \in (\mathbb{R} \setminus L) \mid \neg(\tilde{g}(x_i) \rho 0)\}$ **end if****return**  $\{\mathcal{T}, \mathcal{F}\}$ 

Algorithm 5 はそれまでに得られている  $\mathcal{U}_r$  の情報を  $f$  に代入して,  $x_i$  に関する区間係数一変数多項式を求める.

例えば原点を中心とする円の内部を動く条件など, ある変数について定数項以外の係数が有理数の場合には, Algorithm 6 を適用できる. Algorithm 6 では  $\rho \in \{\leq, <\}$  に制限していることに注意する.

Algorithm 3 から 6 によって得られた結果を利用することで入力の一階述語論理式の真偽値を決定できる部分集合を構成できる. 与えられた QE 問題を解くために bounded CAD で解かなければならない領域は  $\mathcal{U}_r = \mathbb{R}^r \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{F})$  となるが, 以降の計算を容易にするために,  $\mathcal{U}_r$  は  $\mathcal{U}_r \supseteq \mathbb{R}^r \setminus (\mathcal{T} \cup \mathcal{F})$  を満たす以下のような閉区間の直積集合として与える.

$$\mathcal{U}_r = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r \mid x_i^l \leq x_i \leq x_i^h, x_i^l, x_i^h \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} (i = 1, \dots, r)\} \quad (5)$$

**6.2 射影段階**

---

**Algorithm 5** SUBST( $f, x_i, \mathcal{U}_r$ )

---

**Input:** 多項式  $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$ , 主変数  $x_i$ , 領域  $\mathcal{U}_r \subseteq \mathbb{R}^r$ **Output:**  $x_i$  に関する区間係数一変数多項式

```

for  $j = 1$  to  $r$  do
  if  $i \neq j$  then
     $V_j \leftarrow \{x_j \in \mathbb{R} \mid \exists x_1 \cdots \exists x_{j-1} \exists x_{j+1} \cdots \exists x_r ((x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{U}_r)\}$ 
     $l \leftarrow \min\{x_j \in V_j\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 
     $h \leftarrow \max\{x_j \in V_j\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 
     $f \leftarrow f$  の  $x_j$  に  $[l, h]$  を代入し, 区間演算を用いて展開
  end if
end for
return  $f$ 

```

---



---

**Algorithm 6** EVALATOM3( $f_1(x_i) + f_2(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r) \rho 0, \mathcal{U}_r$ )

---

**Input:** 一変数多項式  $f_1 \in \mathbb{Q}[x_i]$ ,  $x_i$  の次数が 0 であるような多項式  $f_2 \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$ ,  $\rho \in \{\leq, <\}$ , 領域  $\mathcal{U}_r \subseteq \mathbb{R}^r$ **Output:**  $f_1 + f_2 \rho 0$  が真となる集合  $\mathcal{T}$  および偽となる集合  $\mathcal{F}$ 

```

 $[l, h] \leftarrow \text{SUBST}(f_2, x_i, \mathcal{U}_r)$ 
if  $h = \infty$  then
   $\mathcal{T}_h \leftarrow \emptyset$ 
else
   $\{\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h\} \leftarrow \text{EVALATOM1}(f_1 + h \rho 0)$ 
end if
if  $l = -\infty$  then
   $\mathcal{F}_l \leftarrow \emptyset$ 
else
   $\{\mathcal{T}_l, \mathcal{F}_l\} \leftarrow \text{EVALATOM1}(f_1 + l \rho 0)$ 
end if
return  $\{\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_l\}$ 

```

---

5.1 節で提案した射影演算 BPROJ では Algorithm 1 に現れる QE 問題を解く必要がある．本節では以下の QE 問題に対する数値手法を利用した実装方法について述べる．

$$\exists x_1 \cdots \exists x_k (f(x_1, \dots, x_k) = 0 \wedge (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{U}_k) \quad (6)$$

式 (6) を解くことは，多項式  $f$  が  $\mathcal{U}_r$  上で，0 になるか判定することであり，正確に評価すると計算時間がかかる．また，射影演算で得られる射影因子の多くは必要なものであり，式 (6) の評価に時間をかけることは避けるべきだと考える．

そこで，6.1 節の場合と同様に数値計算を利用して正確性を失うことで，式 (6) を高速に解くことを選択した．6.1 節で説明したように  $\mathcal{U}_r$  を式 (5) のように閉区間の直積集合として与えているので，区間演算を用いて簡単に評価できる．Algorithm 7 に評価の流れを示す．

---

**Algorithm 7** SolveSubQE( $f, \mathcal{U}_k$ )
 

---

**Input:** 多項式  $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$ ，閉区間の直積集合  $\mathcal{U}_k \subseteq \mathbb{R}^k$

**Output:**  $\mathcal{U}_k$  で  $f$  が 0 になる場合は true，そうでない場合は不定 (true または false)

$[l, h] \leftarrow f$  の各変数に  $\mathcal{U}_k$  の対応する区間を代入し値域を区間演算により求める

**if**  $l \leq 0$  and  $h \geq 0$  **then**

**return true**

**else**

**return false**

**end if**

---

Algorithm 7 は，区間演算を利用しているので， $f$  が  $\mathcal{U}_k$  上で 0 になる場合には必ず真を返す．したがって，射影因子として必要な多項式に適用すると必ず真を返す． $f$  が  $\mathcal{U}_k$  上で 0 にならない場合は  $\mathcal{U}_k$  の区間幅が十分に小さければ偽を返すが，そうでなければ真を返す．しかし，実用的にはこの方法で十分であると考えている．

### 6.3 持ち上げ段階

持ち上げ段階では，補題 12 の判定をするため， $\varphi$  の真偽値が  $\mathcal{U}_r$  上で一定であるか判定する必要がある．つまり，partial CAD と同様に入力の一階述語論理式に現れる原子論理式を個別に評価する．真偽値が確定できた値のみを利用して入力の一階述語論理式全体を評価する．その結果，一階述語論理式の実偽値が確定できれば持ち上げを回避することができる．本節では，与えられた原子論理式の  $\mathcal{U}_r$  上での真偽値の評価方法について述べる．

セル  $c \in \mathcal{D}_k$  での原子論理式  $\psi = f(x_1, \dots, x_r) \rho 0$  ( $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_r]$ ,  $\rho \in \{\leq, <, =, \neq\}$ ) の評価をすることを考える． $f$  のレベルが  $k$  以下の場合には  $f$  は射影因子で，その符号は既知であるので， $\psi$  の真偽値は正確に決定することができる．したがって， $f$  のレベルが  $k$  より大きい場合のみを考えれば良い．

原子論理式  $\psi$  の評価では 6.2 節と同様に区間演算を用いて多項式の値域を求める． $c$  を持ち上げる場合にはその標本点  $s \in c$  を考える．このとき  $s$  の各座標は代数的数であり，定義多項式と実根の分離区間により表現されている．得られている分離区間の幅は式 (5) で表される真偽値が

表 1: 計算時間の比較 (単位: 秒)

問題	SyNRAC		Mathematica 8.0
	CAD	BCAD	
adam1	0.26	0.13	0.88
adam2-1	9.23	1.77	2.75
adam2-2	4.37	4.03	4.15
adam3	5.82	4.84	2.31
mpc1	-	25.40	116.7
portfolio	-	1.42	272.43
port-nox3	6.67	6.07	52.55
port-para	-	11.33	103.38
mooea	195.89	42.54	9.74
kimura5	-	253.89	9.84
kimurac	-	54.35	>3600

未知の領域の区間幅よりも小さいので, レベルが  $k$  以下の変数には標本点の各座標を表す分離区間を代入し, レベルが  $k$  より大きい変数  $x_i$  には式 (5) で表現される区間  $[x_i^l, x_i^u]$  を代入し, 区間演算により値域を評価する. その値域と  $\rho$  から,  $\psi$  の真偽値が確定すればその真偽値が, セル  $c$  の  $\mathcal{U}_r$  上の  $\psi$  の真偽値となる.

この方法で, レベル  $k$  以下の原子論理式のみを評価する実装よりも多くのセルの持ち上げを回避することが期待できる.

## 7 実験結果

本章では, 計算機実験により bounded CAD の効果について述べる. 計算は Intel(R) Core(TM) 2 Duo CPU 1.6 GHz, 2.0 Gbyte メモリ上で行った.

表 1 は, 計算時間を比較した表である. 「CAD」と「BCAD」は, それぞれ SyNRAC [13] 上に実装した通常の CAD 手法と bounded CAD 手法を表し, Mathematica 8.0 の QE コマンド Reduce との比較も行った.

最初の 5 つの問題 adam1, adam2-1, adam2-2, adam3, mpc1 は制御系設計で現れる問題 [22] である. 次の 4 つの問題 portfolio, port-nox3, port-para, mooea は多項式最適化問題の目的関数の実行可能集合を表す QE 問題 [20, 8] である. 最後の 2 つの問題は, 証明問題を表す QE 問題である. 具体的な入力については A 章を参照されたい.

CAD 列と BCAD 列の比較により, portfolio, port-para, kimura5 など通常の CAD 手法では解けなかった問題が解けるなど, bounded CAD 手法により多くの問題で効率化が実現できていることを確認できる. また, mooea を除き Mathematica よりも高速に解けていることが確認できる.

表 2 はレベル毎の射影因子の数を表している. BCAD では 5.1 節の手法により, CAD よりも

表 2: 射影因子の数

問題	手法	射影因子数						合計
		6	5	4	3	2	1	
adam1	CAD					2	6	8
	BCAD					2	6	8
adam2-1	CAD				3	15	57	75
	BCAD				3	12	53	68
adam2-2	CAD				4	17	72	93
	BCAD				4	16	63	83
adam3	CAD			2	5	11	25	43
	BCAD			2	5	9	25	41
mpc1	CAD			7	8	49	982	1046
	BCAD			5	6	19	193	223
portfolio	CAD			4	8	18	156	183
	BCAD			3	4	10	51	68
port-nox3	CAD			3	4	11	58	76
	BCAD			3	4	11	58	76
port-para	CAD			4	5	17	98	124
	BCAD			4	5	17	98	124
mooea	CAD		4	7	13	39	192	255
	BCAD		4	7	13	39	192	255
kimura5	CAD	4	6	3	9	34	268	324
	BCAD	4	6	3	8	17	109	147
kimurac	CAD		4	3	8	25	195	235
	BCAD		4	3	8	17	136	168

射影因子の数が削減できていることが分かる。

port-nox3 は portfolio から冗長な制約式  $x_3 \geq 0$  を取り除いた問題である。通常の射影演算では冗長な制約がないほうが射影因子数が少なくなるため、port-nox3 のほうが射影因子の数が少なくなっている。それに対し、bounded CAD では、 $x_3 \geq 0$  の制約があることで、数値演算で求める  $\mathcal{U}_4$  をより小さくできたために portfolio のほうが射影因子数が少なくなり、計算時間も良い結果が得られている。

port-para や mooea は bounded CAD により射影因子の数は削減できていないが、持ち上げ段階の改良により、セルを持ち上げる数の削減により計算時間の改善が実現できていると考えられる。

表 3: §7.1 射影因子数

level	5	4	3	2	1	合計
CAD	4	5	9	24	397	439
BCAD	4	5	8	22	335	374

### 7.1 問題の分割

bounded CAD では  $\mathcal{U}_r$  によって射影因子数の削減や持ち上げるセルを削減するため、与えられた問題を分割することにより、そのままでは解くことができない問題に対応できることがある。ここでは例を使ってその効果を示す。

以下の非線形パラメトリック最適化問題 [19, p. 31] について考える。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & x_1^3 + 2x_1^2 - 5x_1 + 2x_2^2 - 3x_2 - 6 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 2.5 + \theta_1 \wedge 0.5x_1 + x_2 \leq 1.5 + \theta_2 \wedge \\ & x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge 0 \leq \theta_1 \leq 1 \wedge 0 \leq \theta_2 \leq 1. \end{aligned}$$

この問題の目的関数の実行可能集合は以下の一階述語論理式で表される。

$$\begin{aligned} \exists x_1 \exists x_2 \quad & (y = x_1^3 + 2x_1^2 - 5x_1 + 2x_2^2 - 3x_2 - 6 \wedge \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2.5 + \theta_1 \wedge 0.5x_1 + x_2 \leq 1.5 + \theta_2 \wedge \\ & x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge 0 \leq \theta_1 \leq 1 \wedge 0 \leq \theta_2 \leq 1). \end{aligned} \quad (7)$$

表 3 は式 (7) を CAD 手法および bounded CAD 手法で解いた場合のレベル毎の射影因子数を表している。bounded CAD の場合には、6.1 節に示した方法で、以下の数値手法により真偽値が確定できない領域が得られた。

$$\mathcal{U}_5 = -89/4 \leq y \leq 1151/64 \wedge 0 \leq \theta_1 \leq 1 \wedge 0 \leq \theta_2 \leq 1 \wedge 0 \leq x_1 \leq 7/4 \wedge 0 \leq x_2 \leq 5/2$$

この結果を利用することで通常の射影演算 [16] によって得られる射影因子よりも、bounded CAD による方法で大幅な削減を実現できている。しかし、どちらの場合も持ち上げ段階でメモリ不足となり解くことができなかった。Mathematica 8.0 はエラーにはならなかったが 3600 秒かけても解を得ることはできなかった。

しかし、入力の一階述語論理式で表される領域を 16 個に分割することで、それぞれの部分問題での射影因子数を削減でき、問題を解くことができた。表 4 は各部分問題における射影因子数とそのときの計算時間(秒)を表している。部分問題によっては、元の問題に直接 bounded CAD を適用した場合の射影因子数 374 よりも増えているものがある。しかし、bounded CAD の前処理で計算される  $\mathcal{U}_5$  の領域が小さくなることで、持ち上げ段階で持ち上げるセルの数が削減されているのでメモリ不足にならずに計算が完了していると考えられる。

## 8 まとめ

本論文では、数値手法を用いて与えられた一階述語論理式を評価し、真偽値が確定できなかった領域のみの CAD を構築する bounded CAD 手法について述べた。bounded CAD は通常の CAD



よりも少ない射影因子で構築できることと, 持ち上げ段階では, Collins らによる提案された方法よりも不要なセルの持ち上げを回避できることを示した. また, 数値手法による一階述語論理式の評価方法および bounded CAD の各段階について実装方法を述べ, 計算機実験により bounded CAD の効果を確認した. 計算機実験では, bounded CAD の応用として, 与えられた QE 問題を分割することでそのままでは解けない問題に対応できる可能性があることを示した.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり, ご指導いただいた立教大学の横山和弘先生に深く感謝しております. 数式処理学会大会での発表や本論文執筆にあたり貴重なコメントを頂いた株式会社富士通研究所の穴井宏和様, 屋並仁史様に心から感謝いたします.

## A Examples

adam1 [22] Stability of Dormand-Prince fifth-order embedded seven-stage method (Example 4.4 from Hong et al. (1997))

$$\forall x \forall y \left( \left( x < 0 \wedge x^2 + y^2 < \frac{99438}{100000} \right) \Rightarrow R(x + iy)R(x - iy) < 1 \right),$$

where

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{600}.$$

adam2 [22] Stability of a six-point upwind-based second-order accurate scheme for approximating a two-dimensional advection equation (Example 5.4 from Hong et al. (1997))

$$2-1 \quad \forall \alpha \forall \beta \forall C_2 \left( (\alpha \geq 0 \wedge \beta \geq 0 \wedge 4(\alpha^2 + \beta^2) < 1) \Rightarrow (B \leq 0 \vee D \leq 0) \right),$$

$$2-2 \quad \forall \alpha \forall \beta \forall C_2 \left( (0 \leq \alpha \leq 1 \wedge 0 \leq \beta \leq 1) \Rightarrow A \leq 0 \wedge C \leq 0 \wedge (B \leq 0 \vee D \leq 0) \right),$$

where

$$A = C_2^4(\alpha - \beta + 1)(\alpha - \beta - 1)(\alpha - \beta)^2,$$

$$B = 2C_2^4\beta(3\alpha^2\beta - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta^2 + \alpha + \beta^3 - \beta) + 4C_2^3\alpha\beta(\alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta) + 2C_2^2\alpha(\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \alpha - 2\beta^2 + \beta),$$

$$C = C_2^4\beta^2(\beta^2 - 1) + 4C_2^3\alpha\beta^2(\beta - 1) + \alpha^2(\alpha^2 - 1) + 2C_2^2\alpha\beta(3\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1) + 4C_2\alpha^2\beta(\alpha - 1),$$

$$D = C_2^2R + 2C_2S + T,$$

$$R = 8\alpha^2\beta^2 - 12\alpha^2\beta + 5\alpha^2 - 8\alpha\beta^3 + 8\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha + 4\beta^4 - 4\beta^3 - 3\beta^2 + 4\beta,$$

$$S = 4\alpha^3\beta - 2\alpha^3 - 4\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^2 + 4\alpha\beta^3 - 2\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta - 2\beta^3 + \beta^2,$$

$$T = 4\alpha^4 - 8\alpha^3\beta - 4\alpha^3 + 8\alpha^2\beta^2 + 8\alpha^2\beta - 3\alpha^2 - 12\alpha\beta^2 + 2\alpha\beta + 4\alpha + 5\beta^2 - 4\beta.$$

adam3 [22] Robust multi-objective feedback design (Example 4.2 from Dorato et al. (1997))

Find the set of  $n_d$  satisfying:

$$\exists q_1 \exists q_2 \forall w \left( q_1 > 1 \wedge q_2 > 0 \wedge n_d > 0 \wedge \right.$$

$$\left. (n_d - q_1^2)w^4 + (n_d((q_1 + 1)^2 - 2q_2) - (q_1^2 + q_2^2))w^2 + (n_d - 1)q_2^2 \geq 0 \wedge \right.$$

$$\left. (n_d - q_1^2)w^4 + (n_d((q_1 - 1)^2 - 2q_2) - (q_1^2 + q_2^2))w^2 + (n_d - 1)q_2^2 \geq 0 \right).$$



mpc1

$$\begin{aligned} & \exists u (6(t - p^2 - q^2 - u^2) - 2(-p + 2q + u)^4 + 8(-p + 2q + u)^3 + \\ & \quad (-8p - 8q^2 - 16u - 20)(-p + 2q + u)^2 + \\ & \quad 28(p + q^2 + 2u)(-p + 2q + u) - 11(p + q^2 + 2u)^2 = 0 \wedge \\ & \quad p + q^2 + 2u \leq 1 \wedge -p + 2q + u \geq 0 \wedge -p + 2q + u \leq 1 \wedge p + q^2 + 2u \geq 0 \wedge \\ & \quad 0 \leq p \leq 1/4 \wedge 0 \leq q \leq 1/4 \wedge -1 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq t). \end{aligned}$$

portfolio [20]

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } 45x_3^2 - 30x_2x_3 + 10x_1x_3 + 3x_2^2 - 40x_1x_2 + 8x_1^2 \\ & \text{subject to } x_1 + x_2 + x_3 \leq 10000 \wedge 5x_1 - 4x_2 + 15x_3 \geq 100000 \wedge \\ & \quad x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

The associated QE problem is given as:

$$\begin{aligned} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (y = 45x_3^2 - 30x_2x_3 + 10x_1x_3 + 3x_2^2 - 40x_1x_2 + 8x_1^2 \\ & \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 10000 \wedge 5x_1 - 4x_2 + 15x_3 \geq 100000 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \wedge x_3 \geq 0). \end{aligned}$$

port-nox3 portfolio problem removed redundant constraint [20]

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } 45x_3^2 - 30x_2x_3 + 10x_1x_3 + 3x_2^2 - 40x_1x_2 + 8x_1^2 \\ & \text{subject to } x_1 + x_2 + x_3 \leq 10000 \wedge 5x_1 - 4x_2 + 15x_3 \geq 100000 \wedge \\ & \quad x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

The associated QE problem is given as:

$$\begin{aligned} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (y = 45x_3^2 - 30x_2x_3 + 10x_1x_3 + 3x_2^2 - 40x_1x_2 + 8x_1^2 \\ & \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 10000 \wedge 5x_1 - 4x_2 + 15x_3 \geq 100000 \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0). \end{aligned}$$

moorea extended problem of example 1 in [8, p. 11]

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } x_1^2 + x_2^2 + x_3 \text{ and} \\ & \text{minimize } (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3 \\ & \text{subject to } -2 \leq x_1 \leq 2 \wedge -2 \leq x_2 \leq 2 \wedge -1 \leq 10x_3 \leq 1. \end{aligned}$$

The associated QE problem is given as:

$$\begin{aligned} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (y_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \wedge y_2 = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3 \wedge \\ & \quad -2 \leq x_1 \leq 2 \wedge -2 \leq x_2 \leq 2 \wedge -1 \leq 10x_3 \leq 1). \end{aligned}$$

kimura5

$$\begin{aligned} & \exists x_1 \exists x_2 \exists y_1 \exists y_2 ((l_1 l_2 + l_1 + l_2)x_1 x_2 = l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2 + l_1 l_2 \wedge \\ & \quad (l_1 l_2 + l_1 + l_2)(x_1 + x_2) = l_1^2 + l_2^2 + l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2 + l_1 + l_2 \wedge \\ & \quad (l_1^2 l_2^2 + l_1^2 + l_2^2)y_1 y_2 = l_1^4 l_2^2 + l_1^2 l_2^4 + l_1^2 l_2^2 \wedge \\ & \quad (l_1^2 l_2^2 + l_1^2 + l_2^2)(y_1 + y_2) = l_1^4 + l_2^4 + l_1^4 l_2^2 + l_1^2 l_2^4 + l_1^2 + l_2^2 \wedge \\ & \quad l_1 \geq l_2 \geq 1 \wedge y_1 > x_1 \geq x_2 \wedge y_1^2 \geq y_2^2 \wedge y_1 \geq 0). \end{aligned}$$

kimurac

$$\begin{aligned} \exists x_1 \exists x_2 \exists y_1 \exists y_2 (3(x_1 + x_2) = 2(l_1 + l_2 + 1) \wedge 3x_1x_2 = -l_1^2 - l_2^2 + 2l_1l_2 + 2l_1 + 2l_2 - 1 \wedge \\ (l_1^2 + l_2^2 + l_1^2l_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = l_1^4 + l_2^4 + l_1^4l_2^2 + l_1^2l_2^4 + l_1^2 + l_2^2 \wedge \\ (l_1^2 + l_2^2 + l_1^2l_2^2)y_1^2y_2^2 = l_1^2l_2^2 + l_1^4l_2^2 + l_1^2l_2^4 \wedge \\ x_1 \geq x_2 \wedge y_1^2 \geq y_2^2 \wedge y_1 \geq 0 \wedge y_1 = x_1). \end{aligned}$$

### 参 考 文 献

- [1] H. Anai and K. Yokoyama. Cylindrical algebraic decomposition via numerical computation with validated symbolic reconstruction. In A. Dolzhan, A. Seidl, and T. Sturm, editors, *Algorithmic Algebra and Logic*, pages 25–30, 2005.
- [2] C. W. Brown. Improved projection for cylindrical algebraic decomposition. *Journal of Symbolic Computation*, 32(5):447–465, 2001.
- [3] B. F. Caviness and J. R. Johnson, editors. *Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition*. Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer, 1998.
- [4] G. E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. In *LNCS*, volume 32. Springer Verla, 1975.
- [5] G. E. Collins and H. Hong. Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. *Journal of Symbolic Computation*, 12(3):299–328, 1991.
- [6] G. E. Collins, J. R. Johnson, and W. Krandick. Interval arithmetic in cylindrical algebraic decomposition. *Journal of Symbolic Computation*, 34(2):145–157, 2002.
- [7] J. H. Davenport and J. Heintz. Real quantifier elimination is doubly exponential. *Journal of Symbolic Computation*, 5(1/2):29–35, 1988.
- [8] K. Deb. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. Wiley-Interscience Series in Systems and Optimization. John Wiley & Sons, Chichester, 2001.
- [9] L. González-Vega. A combinatorial algorithm solving some quantifier elimination problems, pages 365–375. In Caviness and Johnson [3], 1998.
- [10] H. Hong. An improvement of the projection operator in cylindrical algebraic decomposition. In *Proceedings of the international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 261–264, New York, NY, USA, 1990. ACM.
- [11] H. Hong. Quantifier elimination for formulas constrained by quadratic equations. In *Proceedings of the 1993 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, ISSAC '93, pages 264–274, New York, NY, USA, 1993. ACM.
- [12] H. Hong and M. Safey El Din. Variant quantifier elimination. *Journal of Symbolic Computation*, 47(7):883–901, 2012.
- [13] H. Iwane, H. Yanami, H. Anai, and K. Yokoyama. An effective implementation of a symbolic-numeric cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. In *Proceedings of the 2009 International Workshop on Symbolic-Numeric Computation*, volume 1, pages 55–64, 2009.

- [14] R. Loos and V. Weispfenning. Applying linear quantifier elimination. *The Computer Journal*, 36(5):450–462, 1993.
- [15] S. McCallum. Solving polynomial strict inequalities using cylindrical algebraic decomposition. *The Computer Journal*, pages 432–438, 1993.
- [16] S. McCallum. An improved projection operator for cylindrical algebraic decomposition. In Caviness and Johnson [3], pages 242–268.
- [17] S. McCallum. On projection in CAD-based quantifier elimination with equational constraint. In *Proceedings of the 1999 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, ISSAC '99, pages 145–149, New York, NY, USA, 1999. ACM.
- [18] S. McCallum. On propagation of equational constraints in CAD-based quantifier elimination. In *Proceedings of the 2001 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, ISSAC '01, pages 223–231, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [19] E. Pistikopoulos, M. Georgiadis, and V. Dua. *Multi-parametric programming: theory, algorithms, and applications*, volume 1 of *Multi-Parametric Programming*. Wiley-VCH, 2007.
- [20] J. Schattman. Portfolio optimization under nonconvex transaction costs with the global optimization toolbox. <http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=1401&view=html>.
- [21] A. W. Strzeboński. Solving systems of strict polynomial inequalities. *Journal of Symbolic Computation*, 29:471–480, March 2000.
- [22] A. W. Strzeboński. Cylindrical algebraic decomposition using validated numerics. *Journal of Symbolic Computation*, 41(9):1021–1038, 2006.
- [23] V. Weispfenning. The complexity of linear problems in fields. *Journal of Symbolic Computation*, 5:3–27, February 1988.
- [24] V. Weispfenning. Quantifier elimination for real algebra - the quadratic case and beyond. *AAECC*, 8:85–101, 1993.
- [25] 穴井宏和, 横山和弘. *QE の計算アルゴリズムとその応用 – 数式処理による最適化*. 東京大学出版会, 8 2011.