数式処理 *Bulletin of JSSAC (2009)*
Vol. 16, No. 2, pp. 15 - 22

特集記事＜統計科学と数式処理＞

実験計画法とグレブナー基底

青木 敏*　　竹村 彰通†

鹿児島大学大学院 理工学研究科
JST, CREST

東京大学大学院情報理工学系研究科
JST, CREST

1　はじめに

近年、急速に発展している計算代数統計 (Computational Algebraic Statistics) の話題のひとつに、グレブナー基底の理論の実験計画法への応用がある。これは歴史的には、計算代数統計の発端となった分野でもあり、[15] に始まり現在もなお、代数、統計の両研究者によって研究が続けられている。特に、近年の計算機の発達により、代数学が、実際に計算できる分野へと変貌をとげつつある、という事実も、発展の一因であるといえる。これらの背景については、著者による解説記事 [2] も参照してほしい。

本稿では、主に 2 水準計画を題材に、グレブナー基底の理論が実験計画法の分野で使われる具体的な問題のうち、最も初期の結果を紹介する。2 水準計画の研究の歴史は非常に古いが、その理論の中心は、[6] および [7] などに始まる、regular 計画の理論である。regular 計画の理論は、$GF(2)$ 上の線形代数を用いて記述できるためエレガントであり、また実用の面でも、ほとんどの実験計画法の教科書で標準的に解説されているなど、中心的な役割を果たしている。これに対し、regular でない一部実施計画の構造に関しては、Plackett-Burman 計画などの一部の例を除いては、理論的な結果はほとんど得られていない。一方、計算代数統計では、以下に紹介するように、計画を単に連立方程式の解集合としてとらえるので、計画が regular か否かを最初に区別するという発想はない。実際、計画を代数的に扱うことで、これまでは regular 計画についてのみ定義されていた概念が自然に non-regular 計画にも拡張できる、など、多くの新しい結果が得られている。

本稿の構成は以下の通りである。まず、2 節において、計画を代数的に扱うための定義を与える。3 節では、[15] の結果のひとつとして、実験計画法における因子の交絡関係を、代数的に表現する方法を紹介する。これは、regular design における別名関係を一般化した結果、ととらえることもできる。最後に 4 節において、[10] で導入された、指示関数 (indicator

*aoki@sci.kagoshima-u.ac.jp
†takemura@stat.t.u-tokyo.ac.jp

function) を紹介する。指示関数は、現在、non-regular な一部実施計画の特徴付けに有効な道具であると多くの研究者に認められている。本稿の多くの箇所では、グレブナー基底に関する用語を定義なしに用いている。特に、単項式順序と割り算アルゴリズムについては、説明を割愛した。これらについては、グレブナー基底に関する教科書 ([8], [1], [12] など) を参照してほしい。

2 計画イデアル

m 因子の計画を考える。因子の各水準が有理数 $\mathbb{Q}$ で与えられるなら、m 因子の組合せ配置は $\mathbb{Q}^m$ 個の点で与えられ、一部実施計画はその部分集合となる。計算代数統計では、この点集合を連立方程式系の解集合 (代数的多様体) ととらえ、また、この点集合でゼロとなる多項式の集合が興味の対象となる。以下、本稿では、因子がすべて 2 水準の場合で説明する。一般的な議論は、[13] 等を参照してほしい。

m 個の 2 水準因子の組合せ配置 $\mathcal{D}$ は、水準を $\{-1, +1\}$ で表せば、

$$\mathcal{D} = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1^2 = \cdots = x_m^2 = 1\} = \{-1, +1\}^m$$

と書ける。その部分集合 $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ を一部実施計画とよぶ。$\mathbb{Q}$ を係数とする不定元 $x_1, \dots, x_m$ の多項式環を $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ と書く。このとき、$\mathcal{F}$ の各点でゼロとなるような多項式の集合

$$I(\mathcal{F}) = \{f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m] \mid f(x_1, \dots, x_m) = 0 \text{ for all } (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{F}\}$$

はイデアルとなる。これを $\mathcal{F}$ の計画イデアルとよぶ。$I(\mathcal{F})$ は根基イデアルである。つまり、$f^2 \in I(\mathcal{F})$ であれば $f \in I(\mathcal{F})$ が成り立つ。

一般に、イデアル $I \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ が基底 $g_1, \dots, g_k \in I$ で張られるとは、任意の $f \in I$ に対し

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{k} s_i(x_1, \dots, x_m) g_i(x_1, \dots, x_m)$$

となる多項式 $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ が存在することをいう。ただしこの $s_1, \dots, s_k$ は一般には一意的ではない。I が基底 $g_1, \dots, g_k$ で張られるとき、$I = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ と書く。例えば、2 水準 2 因子の組合せ配置 (2^2-計画) の場合、$\mathcal{D} = \{-1, +1\}^2$ の計画イデアルは、

$$I(\mathcal{D}) = \left\langle x_1^2 - 1, x_2^2 - 1 \right\rangle$$

と書ける。任意のイデアルに基底が存在することは、ヒルベルトの基底定理で保証される。また、$g_1, \dots, g_k$ が $I(\mathcal{F})$ の基底であるなら、$\mathcal{F}$ は、連立方程式系 $g_1 = 0, \dots, g_k = 0$ の解集合に一致する。

一部実施計画 $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ の実験回数を n とする。$I(\mathcal{F})$ の基底を求める一般的な方法は、イデアルの交わりを求めるアルゴリズムを利用するものである。いま、計画が $(a_1, \dots, a_m) \in \{-1, +1\}^m$ の 1 点のみである場合、この計画の計画イデアルは、定義より

$$\langle x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m \rangle \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$$

である。従って、n 点の計画 $\mathcal{F} = \{(a_{i1}, \ldots, a_{im}),\ i = 1, \ldots, n\}$ の計画イデアルは、

$$I(\mathcal{F}) = \bigcap_{i=1}^{n} \langle x_1 - a_{i1}, \ldots, x_m - a_{im} \rangle \tag{1}$$

となる。一般にイデアルの交わりの計算には、グレブナ基底を利用する。すなわち、新たに不定元 $t_1, \ldots, t_n$ と多項式環 $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n]$ を導入すれば、式 (1) は

$$\begin{aligned} I(\mathcal{F}) &= I^* \cap \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m], \\ I^* &= \langle t_i(x_1 - a_{i1}), \ldots, t_i(x_m - a_{im}), i = 1, \ldots, n, t_1 + \cdots + t_n - 1 \rangle \subset \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n] \end{aligned} \tag{2}$$

と表されるので、$I^* \subset \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n]$ の被約グレブナー基底を $\{t_1, \ldots, t_n\} > \{x_1, \ldots, x_m\}$ なる適切な項順序のもとで求めればよい。これは、グレブナー基底の性質のうち、消去理論とよばれるものであり、詳しくは、[8] 等を参照してほしい。

例 1 (2 水準 **7** 因子 2^{7-4}_{III} 一部実施計画**)**
直交表 $L_8(2^7)$ として知られる、一部実施度 1/16 の計画を考える。これは、定義関係

$$x_3 = -x_1 x_2,\ x_5 = -x_1 x_4,\ x_6 = -x_2 x_4,\ x_7 = x_1 x_2 x_4 \tag{3}$$

から得られる分解能 III の計画であり、以下で与えられる。

run\ 因子	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	1	1	1	1
3	-1	1	1	-1	-1	1	1
4	-1	1	1	1	1	-1	-1
5	1	-1	1	-1	1	-1	1
6	1	-1	1	1	-1	1	-1
7	1	1	-1	-1	1	1	-1
8	1	1	-1	1	-1	-1	1

この計画について、式 (2) の I^* の被約グレブナー基底を求め、そのうち変数 $t_1, \ldots, t_8$ を含まないものが $I(\mathcal{F})$ の基底 (グレブナー基底) となる。項順序を、$x_1 > \cdots > x_7$ の辞書式順序とすれば、グレブナー基底は

$$\{x_7^2 - 1, x_6^2 - 1, x_5^2 - 1, x_3 + x_5 x_6, x_2 + x_5 x_7, x_1 + x_6 x_7, x_4 - x_5 x_6 x_7\} \tag{4}$$

となり、次数付逆辞書式順序とすれば、グレブナー基底は

$$\begin{aligned} &\{x_7^2 - 1, x_6^2 - 1, x_5^2 - 1, x_4^2 - 1, x_3^2 - 1, x_2^2 - 1, x_1^2 - 1, \\ &x_2 x_3 + x_1, x_4 x_5 + x_1, x_6 x_7 + x_1, x_1 x_3 + x_2, x_4 x_6 + x_2, x_5 x_7 + x_2, \\ &x_1 x_2 + x_3, x_4 x_7 + x_3, x_5 x_6 + x_3, x_1 x_5 + x_4, x_2 x_6 + x_4, x_3 x_7 + x_4, \\ &x_1 x_4 + x_5, x_2 x_7 + x_5, x_3 x_6 + x_5, x_1 x_7 + x_6, x_2 x_4 + x_6, x_3 x_5 + x_6, \\ &x_1 x_6 + x_7, x_2 x_5 + x_7, x_3 x_4 + x_7\} \end{aligned} \tag{5}$$

となる。

以下、$x_1, \dots, x_m$ の単項式を $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ のように表す。2 水準を $\{-1, +1\}$ とおいているので、$\mathbf{a}$ は $(a_1, \dots, a_m) \in \{0, 1\}^m$ として考えれば十分である。例 1 の結果は、この計画のような regular な一部実施計画 (つまり、式 (3) のような定義関係から得られる一部実施計画) における、計画イデアルの基底と定義関係との関係を示唆している。実際、計画 $\mathcal{F}$ が定義関係

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}_\ell} = c_\ell,\ c_\ell \in \{-1, 1\},\ \ell = 1, \dots, s$$

により定まるなら、計画イデアルは

$$I(\mathcal{F}) = \left\langle x_1^2 - 1, \dots, x_m^2 - 1, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_1} - c_1, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_s} - c_s \right\rangle$$

と書ける。例えば、例 1 の計画イデアルは、

$$I(\mathcal{F}) = \left\langle x_1^2 - 1, \dots, x_7^2 - 1, x_1x_2x_3 + 1, x_1x_4x_5 + 1, x_2x_4x_6 + 1, x_1x_2x_4x_7 - 1 \right\rangle \tag{6}$$

と書くこともできる。

このように、一部実施計画 $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ の計画イデアルの基底は、$\mathcal{F}$ が regular な計画であれば定義関係から自明である。一方、計画が regular でない場合にも、$\mathcal{D}$ の基底 $\{x_1^2 - 1, \dots, x_m^2 - 1\}$ に加えることで、$I(\mathcal{F})$ の基底となるような多項式の集合を考えることができる。[10] では、この多項式の集合を $\mathcal{F}$ の定義多項式集合 (a set of defining equations) と読んでいる。これは、regular な計画における定義関係を一般化した概念であるといえる。

また、regular な計画については、その計画イデアルの基底のひとつが自明に求まるとはいっても、一般にそれはグレブナー基底ではない。実際、式 (6) の右辺は、どの項順序に対するグレブナー基底にもなっていない。上の議論では、計画イデアルの基底を求めるための一般的な方法として消去イデアルの理論を利用したため、結果として、計画イデアルのグレブナー基底が得られたわけだが、実は、グレブナー基底を求めることには、それ自体重要な意味がある。これを次節で説明する。

3 交絡関係とイデアル所属問題

計画イデアル $I(\mathcal{F})$ を考えることのメリットのひとつに、因子の交絡関係が、regular でない計画についても自然に拡張でき、また、簡明に表現できることがある。この、因子の交絡関係の判定は、実はイデアル所属問題と等価であり、一般的には計画イデアルのグレブナー基底の計算によって解くことができる。本節ではその概要を説明する。詳細は、[15] や [11] などを参照してほしい。

いくつかの必要な定義を与える。$f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ の、項順序 τ に対する先頭項を $\mathrm{LT}_\tau(f)$ と書く。イデアル $I \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$ に対して、その要素の先頭項の集合を $\mathrm{LT}_\tau(I) = \{\mathrm{LT}_\tau(f) \mid f \in I\}$ と書く。$\mathrm{LT}_\tau(I)$ に含まれない単項式を、標準単項式 (standard monomial) とよぶ。$I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ であるとき、さらに $\langle \mathrm{LT}_\tau(g_1), \dots, \mathrm{LT}_\tau(g_t) \rangle = \langle \mathrm{LT}_\tau(I) \rangle$ が成り立つことが、$\{g_1, \dots, g_t\}$ が項順序 τ に対するグレブナー基底であることの定義である。標準単項式の集合 $\{\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \notin \langle \mathrm{LT}_\tau(I(\mathcal{F})) \rangle\}$ は、グレブナー基底の性質から、「項順序 τ に関するグレブナー基底のどの要素の先頭項で

も割り切れない単項式の集合」と言い替えることができる。以下、この集合を $\mathrm{Est}_\tau(\mathcal{F})$ と書く。重要なのは、商環 $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_m]/I(\mathcal{F})$ の構造に関する次の定理である (詳しくは [16] の Proposition 1.1 などを参照)。

定理 **2**
$\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_m]/I(\mathcal{F})$ は、標準単項式の集合 $\mathrm{Est}_\tau(\mathcal{F})$ の張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間に同型である。$\mathrm{Est}_\tau(\mathcal{F})$ は、このベクトル空間の基底をなす。

例 **3**
例 1 で求めたふたつのグレブナー基底に対する $\mathrm{Est}_\tau(\mathcal{F})$ は、以下のようになる。

- 辞書式順序: $\{1, x_5, x_6, x_7, x_5x_6, x_5x_7, x_6x_7, x_5x_6x_7\}$
- 次数付逆辞書式順序: $\{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$

$\mathrm{Est}_\tau(\mathcal{F})$ に含まれる単項式の個数は τ によらず常に実験点の数に等しく、この例では $n = 8$ である。

以上の準備のもとで、因子の交絡と計画イデアルの関係を説明する。単項式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ を、$\sum_{i=1}^m a_i = 1$ のときに主効果、$\sum_{i=1}^m a_i = 2$ のときに 2 因子交互作用、などとよべば、ふたつの交互作用 (または主効果) $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_2}$ が計画 $\mathcal{F}$ において交絡するとは、$\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}\mathbf{x}^{\mathbf{a}_2}$ が、すべての $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ について $+1$ になるか、-1 になるかのいずれかであることをいう。交絡関係にある交互作用は、同時には推定できないため、主効果や低次の交互作用がより重要という仮定の下では、主効果はなるべく高次の交互作用と交絡するように計画を定めるのが、regular 計画における分解能の考え方である。この交絡関係を、計画イデアルに対応させれば以下のようになる。

定理 **4**
$c \in \{-1, +1\}$ とするとき、以下の 2 条件は同値である。

$$\text{(i)}\ \ \mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}\mathbf{x}^{\mathbf{a}_2} = c \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathcal{F} \qquad\qquad \text{(ii)}\ \ \mathbf{x}^{\mathbf{a}_1} - c\mathbf{x}^{\mathbf{a}_2} \in I(\mathcal{F})$$

一般に、与えられた多項式がイデアルに属すか否かの判定 (イデアル所属問題) には、グレブナー基底を計算する必要がある。

例 **5**
例 1 の計画では、例えば $x_3 = -x_1x_2$ の関係があり、x_3 の主効果と x_1, x_2 の 2 因子交互作用は交絡している。一方、$x_1x_2 + x_3 \in I(\mathcal{F})$ であることは、式 (5) のグレブナー基底が $x_1x_2 + x_3$ を含むことからただちにわかり、また、

$$x_1x_2 + x_3 = (x_1 + x_6x_7)x_2 - (x_2 + x_5x_7)x_6x_7 + (x_7^2 - 1)x_5x_6 + (x_3 + x_5x_6)$$

と式 (4) のグレブナー基底からも確認できる。一方で、式 (6) の表現からただちに判定することは難しい。

なお、因子の水準が s $(s > 2)$ の場合でも同様の関係が成り立つが、その場合は、水準を 1 の s 乗根で考え、複素数体 $\mathbb{C}$ で考える必要がある。例えば 3 水準因子であれば、水準は $\{1, \omega, \omega^2\}$, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right)$ と定める。詳しくは、[14], [4] を参照してほしい。

4 指示関数 (indicator function)

最後に、[10] により定義された指示関数 (indicator function) について説明する。計画 $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ の指示関数とは、

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{F} \\ 0, & \text{if } \mathbf{x} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{F} \end{cases}$$

を満たす多項式 $f \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_m]$ である。指示関数は、$x_i^2 = 1, i = 1, \ldots, m$ の制約下において、一意的な平方自由な多項式表現 (unique square-free representation) をもつ。また、指示関数と計画 $\mathcal{F}$ は一対一に対応する。計画を指示関数として表現し、その係数について調べることにより計画を分類する、また、従来の実験計画法の概念（交絡、分解能、直交性、regularity、推定可能性、など）を指示関数の係数の性質に対応付ける、等は、計算代数統計の成果の一部である。重要なのは、指示関数は任意の計画について定義できるという点である。したがって例えば、交絡や分解能等、従来の一部実施計画の理論では regular 計画のクラスに限られていた概念も、指示関数の性質として書き直すことにより一般の計画に自然に拡張が可能になる。これらの研究は、[10]、[17] などを参照してほしい。

また、指示関数は多項式であるから、計画イデアルにもとづく計算代数統計の理論との相性もよい。例えば計画イデアルの表現に関しても、$I(\mathcal{F})$ は指示関数を使えば

$$I(\mathcal{F}_1) = \left\langle x_1^2 - 1, \ldots, x_m^2 - 1, f(\mathbf{x}) - 1 \right\rangle$$

と書ける。つまり、指示関数は、それ自身で定義多項式集合となる。

指示関数の性質をいくつか紹介する。組合せ配置 $\mathcal{D}$ の指示関数は、定数関数 $f(\mathbf{x}) = 1$ である。一部実施計画の指示関数は、定数項が、一部実施度 $(n/2^m)$ に一致する。regular な一部実施計画の指示関数の構造は、完全に解明されており、$GF(2)$ 上の線形代数で説明できる (詳しくは [10]、[17] などを参照)。例えば、例 1 の 2^{7-4} 計画の指示関数は、

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{16}(1 - x_1x_2x_3)(1 - x_1x_4x_5)(1 - x_2x_4x_6)(1 + x_1x_2x_4x_7)$$

である。一部実施計画の指示関数の各項の係数は、いずれも定数項を越えることはなく、特に regular な計画では、係数の絶対値はすべて定数項に等しい。

一方、計画が regular でない場合、指示関数の係数からわかることのひとつに、その計画を真に含む regular 計画の有無がある。

例 **6 (regular** でない一部実施計画の指示関数**)**
以下の 3 つの 3 因子計画を考える。

$\mathcal{F}_1$

x_1	x_2	x_3
1	1	1
1	−1	−1
−1	1	−1
−1	−1	1

$\mathcal{F}_2$

x_1	x_2	x_3
1	1	1
1	−1	−1
−1	1	−1

$\mathcal{F}_3$

x_1	x_2	x_3
1	1	1
1	1	−1
1	−1	1
−1	1	1

$\mathcal{F}_1$ は、$x_1x_2x_3 = 1$ で定義される regular な 2^{3-1} 一部実施計画であり、$\mathcal{F}_2$ はその部分集合の non-regular 計画である。また、$\mathcal{F}_3$ は、自身を真に含む regular 計画が存在しない non-regular 計画である。これらの指示関数は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1: &\quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1x_2x_3\\
\mathcal{F}_2: &\quad f(\mathbf{x}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}(x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + \frac{3}{8}x_1x_2x_3\\
\mathcal{F}_3: &\quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2x_3)
\end{aligned}$$

ここで、$\mathcal{F}_2$ の指示関数で、定数項と絶対値の等しい係数の項は、$\mathcal{F}_2$ を含む regular 計画 ($\mathcal{F}_1$) の指示関数の項 ($x_1x_2x_3$) と一致すること、また、$\mathcal{F}_3$ には定数項と絶対値が等しい項がないことが重要である。このような性質は、一般的に成り立つ。

指示関数の係数の絶対値は、それが定数項に等しいのであれば交絡関係を、ゼロより大きく定数項より小さいのであれば「部分的な交絡関係」を示している。[3] はこの点に注目し、母数の同時推定可能性の観点から望ましい性質を持つ、一部実施計画の新たなクラスを提案したものである。

5 おわりに

実験計画法は、グレブナー基底の理論が統計学に応用された最初の分野であるが、定理 2 で述べられている商環の構造自体、Buchberger が 1965 年の学位論文において取り上げた問題でもある。つまり歴史的に見ても、グレブナー基底の理論の最初の結果が、実験計画法という統計学の問題に適用されている、といえる。

最後に、グレブナー基底の理論が実験計画法の分野に応用されるもうひとつの例として、著者の最近の研究を紹介する。これは、実験計画法で観測されるデータが非負整数値である場合に、一般線形モデルの理論にもとづくモデルの当てはめの評価を条件付検定問題として定式化し、マルコフ連鎖モンテカルロ法によって有意確率を推定するためのマルコフ基底を、グレブナー基底として得る、というものである。この手法は、[9] にはじまる計算代数統計の発端となったもうひとつの問題、つまり、マルコフ連鎖モンテカルロ法による分割表の解析の問題に関連するものである。詳細は、[4], [5] を参照してほしい。

参 考 文 献

[1] W. W. Adams and P. Loustaunau (1994). *An Introduction to Gröbner Bases*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI.

[2] 青木敏, 竹村彰通 (2007). 統計学とグレブナー基底 — 計算代数統計の発端と展開. 数学, 論説, 59 巻 3 号, 283–302.

[3] S. Aoki and A. Takemura (2009a). Some characterizations of affinely full-dimensional factorial designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 3525–3532.

[4] S. Aoki and A. Takemura (2009b). Markov basis for design of experiments with three-level factors. in *Algebraic and Geometric Methods in Statistics, (dedicated to Professor Giovanni Pistone on the occasion of his sixty-fifth birthday)*, edited by P. Gibilisco, E. Roiccomagno, M. P. Rogantin and H. P. Wynn, Cambridge University Press, 225–238.

[5] S. Aoki and A. Takemura (2010). Markov chain Monte Carlo tests for designed experiments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 817–830.

[6] G. E. P. Box and J. S. Hunter (1961). The 2^{k-p} fractional factorial design. *Technometrics*, **3**, 311–351, 449–458.

[7] G. E. P. Box, W. C. Hunter and J. S. Hunter (1978). *Statistics for Experiments*, Wiley, New York.

[8] D. Cox, J. Little and D. O'Shea (1997). *Ideal, Varieties, and Algorithms, 2nd edition*. Springer, New York.

[9] P. Diaconis and B. Sturmfels (1998). Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions. *Annals of Statistics*, **26**, 363–397.

[10] R. Fontana, G. Pistone and M. P. Rogantin (2000). Classification of two-level factorial fractions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **87**, 149–172.

[11] F. Galetto, G. Pistone and M. P. Rogantin (2003). Confounding revisited with commutative computational algebra. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **117**, 345–363.

[12] 日比孝之 (2003). グレブナー基底. すうがくの風景 8, 朝倉書店.

[13] G. Pistone, E. Riccomagno and H. P. Wynn (2001). *Algebraic Statistics: Computational Commutative Algebra in Statistics*. Chapman & Hall, London.

[14] G. Pistone and M. P. Rogantin (2008). Indicator function and complex coding for mixed fractional factorial designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 787–802.

[15] G. Pistone and H. P. Wynn (1996). Generalised confounding with Gröbner bases. *Biometrika*, **83**, 653–666.

[16] B. Sturmfels (1996). *Gröbner Bases and Convex Polytopes*. American Mathematical Society, Providence, RI.

[17] K. Q. Ye (2003). Indicator function and its application in two-level factorial designs. *The Annals of Statistics*, **31**, 984–994.