数式処理 *Bulletin of JSSAC (2009)*
Vol. 16, No. 2, pp. 3 - 11

レター

和算における「冪乗演段」で扱われた連立代数方程式の解について

森継 修一*

筑波大学図書館情報メディア研究科

横山 和弘†

立教大学理学部

荒井 千里‡

筑波大学図書館情報メディア研究科

概　要

We show the results of symbolic computations for a series of polynomial systems studied in the 17th century in Japan. In 1674, Takakazu (a.k.a. Kowa) Seki published *Hatsubi-Sanpou*, where he solved all the open problems submitted by Kazuyuki Sawaguchi in *Kokon-Sanpou-Ki*(1671). Subsequently, Kiyoyuki Miyagi published *Meigen-Sanpou* in 1689, where solutions to a series of polynomial systems with higher degrees were given. Miyagi's method was called *Bekijou-Endan* in those days. In the present study, we computed all those systems using the comprehensive Gröbner basis method. Studying the derived univariate polynomials in detail, we found that Miyagi's result was not correct for the cases where the degree n is divisible by 3, and we consider that this fact seems to have been overlooked in the study of history of Japanese mathematics. Moreover, the analysis by the results of comprehensive Gröbner systems shows that Miyagi's systems have some interesting features from their simple but peculiar forms.

1　はじめに

著者らの以前の論文 [6, 9] では，関孝和の「発微算法」(1674) で扱われた連立代数方程式に対し，現代の数式処理システムを用いて計算を行い，刊行当時には知られていなかった問題の特徴などを明らかにした．これに引き続き本稿は，宮城清行による「明元算法」(1689) で扱われた連立代数方程式を現代の数式処理で解いたものである．宮城の解法は当時「冪乗演段」とよばれた手法に属するが，数学的には

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \\ g(x) & = & x^n - b \end{array}\right. \tag{1}$$

*moritsug@slis.tsukuba.ac.jp
†yokoyama@rkmath.rikkyo.ac.jp
‡arai@slis.tsukuba.ac.jp

が与えられたときに，$f(x)$ と $g(x)$ の終結式を計算することに相当した．冪乗演段の問題は，「対象とする方程式のパターンを限定して，次数のみを変化させる」という形で作題されているため，計算の詳細を検討してみると興味深い性質が見つかった．これは，現代の数学から見れば初等的な問題であるが，文献調査を中心とした和算の研究の中では見逃されてきた点と思われ，数式処理が和算の研究に役立つ一例ではないかと考えている．

なお本稿は，第 18 回日本数式処理学会大会 (2009 年 6 月) において，「宮城清行『明元算法』に現れる連立代数方程式の解について」と題して行った講演を基に，内容を発展させたものである．

また，本稿で採り上げた和算書は，http://www2.library.tohoku.ac.jp/wasan/（東北大学和算ポータル）で参照可能である．

2 基本概念

2.1 「発微算法」における消去計算

関孝和「発微算法」(1674) は，澤口一之「古今算法記」(1671) の遺題 15 問に対して解答を与えた．さらにその解説書として，建部賢弘らによる「発微算法演段諺解」(1685) が刊行されている．そこでは，当時の発見である「三乗化による消去」を施して解く問題が中心となっている．「三乗化（命名は小川 [11] による）」とは，「$p+q+r=0 \Rightarrow p^3+q^3+r^3-3pqr=0$」を利用して，消去を行う方法である．具体的には，次の多項式の組が与えられたとする．

$$\begin{cases} f(x) &= A+Bx+Cx^2 \\ g(x) &= x^3-D \end{cases} \tag{2}$$

$f(x)=0$ の両辺を 3 乗することにより，$A^3+B^3x^3+C^3x^6=3ABCx^3$ を得る．次に，$g(x)=0$ を用いて x^3 を書き換えると，

$$A^3+B^3D+C^3D^2=3ABCD \tag{3}$$

となるので，A,B,C,D が従変数 $y,z,\ldots$ の多項式であれば，連立代数方程式 $\{f(x,y,z,\ldots)=0,\ g(x,y,z,\ldots)=0\}$ から x を消去したことに相当する．明らかにこの変形は，以下に示す終結式計算による変数 x の消去と同等である．

$$\mathrm{Res}(g(x),f(x),x)=A^3+B^3D+C^3D^2-3ABCD \tag{4}$$

例えば，「発微算法」第 14 問は，以下の 6 変数連立代数方程式を解く問題である．

$$\begin{cases} f_1 = x^3-y^3-271 \\ f_2 = y^3-z^3-217 \\ f_3 = z^3-u^3-608/10 \\ f_4 = u^3-v^3-3262/10 \\ f_5 = v^3-w^3-61 \\ f_6 = u^2x^2(v^2+w^2+y^2+z^2)-u^2x^4-u^4x^2 \quad +v^2y^2(u^2+w^2+x^2+z^2)-v^2y^4-v^4y^2 \\ \qquad +w^2z^2(u^2+v^2+x^2+y^2)-w^2z^4-w^4z^2 \ -u^2v^2w^2-u^2y^2z^2-v^2z^2x^2-w^2x^2y^2 \end{cases} \tag{5}$$

この f_6 に対して，三乗化を繰り返し適用し，w, v, u, z, y を順次消去すると，最終的に x に関する $1458 = (6 \cdot 3^5)$ 次式が得られる．

当時は，1 変数代数方程式の数値解法として“ ホーナー法 ”[1] に相当する計算法が知られていたので,「連立代数方程式の解法とは，記号的に 1 変数多項式を導出すること」という,現代の数式処理に近い発想が用いられていた．関自身も，変数消去の方針と次数の計算を示したのみで，1458 次式を実際に書き下してはいない．式の形と全実数解が具体的に求められたのは，21 世紀に入ってからであった [6].

2.2 「明元算法」における消去計算

1689 年，宮城清行は「明元算法」（このときは柴田清行と名乗っていた）を出版し,「関孝和とは別の演段術を発明した」として，以下の 5 問の連立代数方程式を解いている [5].「発微算法」の問題と比較すると，3 変数に限定する代わりに，次数を上げていった場合を考察したとみることができる．

(i) 平方冪： 乙 = 甲 − 7,　丙 = 乙 − 5,　$\sqrt{\text{甲}} + \sqrt{\text{乙}} + \sqrt{\text{丙}} = 9$
(ii) 立方冪： 乙 = 甲 − 37,　丙 = 乙 − 19,　$\sqrt[3]{\text{甲}} + \sqrt[3]{\text{乙}} + \sqrt[3]{\text{丙}} = 9$
(iii) 三乗冪： 乙 = 甲 − 175,　丙 = 乙 − 65,　$\sqrt[4]{\text{甲}} + \sqrt[4]{\text{乙}} + \sqrt[4]{\text{丙}} = 9$
(iv) 四乗冪： 乙 = 甲 − 781,　丙 = 乙 − 211,　$\sqrt[5]{\text{甲}} + \sqrt[5]{\text{乙}} + \sqrt[5]{\text{丙}} = 9$
(v) 五乗冪： 乙 = 甲 − 3367,　丙 = 乙 − 665,　$\sqrt[6]{\text{甲}} + \sqrt[6]{\text{乙}} + \sqrt[6]{\text{丙}} = 9$

和算においては，冪を乗算の回数で表すので,「n 乗冪」は x^{n+1} に相当する．式中の定数は,明らかに第 3 式が「$4+3+2=9$」となるように採られているが，いずれも「$\sqrt[n]{\text{丙}}, \sqrt[n]{\text{乙}}$ を順次消去して，$\sqrt[n]{\text{甲}}$ のみの 1 変数多項式を導くこと」を目的にしているので，数値解を求めることは主題ではない．

立法冪を例として，宮城の方法を現代の記法で再現すると以下のようになる．($x = \sqrt[3]{\text{甲}}$, $y = \sqrt[3]{\text{乙}}$, $z = \sqrt[3]{\text{丙}}$ とおいた.)

$$\begin{cases} y^3 = x^3 - a \\ z^3 = y^3 - b \\ x + y + z = c \end{cases} \tag{6}$$

第 3 式を $z = c - x - y$ とし，両辺を 3 乗すると,

$$z^3 = (c-x)^3 - 3(c-x)^2 y + 3(c-x)y^2 - y^3$$

を得る．これを整理して

$$\left\{(c-x)^3 - y^3 - z^3\right\} - 3(c-x)^2 y + 3(c-x)y^2 = 0$$

とすると，y^3, z^3 は x^3 で表せるので,

$$A - By + Cy^2 = 0$$

という y についての 2 次方程式とみることができる．これを $A = By - Cy^2$ と移項して，両辺を 3 乗すると,「$p = q - r \ \Rightarrow\ p^3 = q^3 - r^3 - 3qr(q - r) = q^3 - r^3 - 3pqr$」を用いて，

$$A^3 = B^3y^3 - C^3y^6 - 3ABCy^3 \tag{7}$$

を得る．A, B, C はそれぞれ，x^3, x^2, x の項を含み，y^3 は x^3 で表せるので，方程式 (7) は x の 9 次式である（「八乗方」と，宮城は記している）．結果として，式 (3) の「三乗化による消去」と同じものが得られており，宮城を含む関西の和算家はこれを「冪乗演段」と呼んだ [7].

宮城は，式 (7) に相当する表現を求めたところで計算を終えており，実際に展開して 9 次式を得ているわけではない．他の問題においても同様に,「移項して冪乗を計算，部分式を別の文字に置き換える」ことを繰り返し，$\sqrt[n]{甲}$ の 1 変数多項式を求めたところで，次数を以下のように評価している．

(i) 平方冪： $\sqrt{甲}$ の 4 次式
(ii) 立方冪： $\sqrt[3]{甲}$ の 9 次式
(iii) 三乗冪： $\sqrt[4]{甲}$ の 16 次式
(iv) 四乗冪： $\sqrt[5]{甲}$ の 25 次式
(v) 五乗冪： $\sqrt[6]{甲}$ の 36 次式

宮城が $n = 2, 3, 4, 5, 6$ の場合を解いたことを受け，安藤吉次「一極算法」(1689) は $n = 7$ を，中根元圭「七乗冪演式」(1691) は $n = 8$ を正しく計算した．さらに，刊行はされなかったが，小柿茂則が $n = 9$ の計算を著したとされている [10]．ただし，関がのちに「解伏題之法」(1683) で一般の終結式理論を完成させたのに対し，冪乗演段は，この時点では理論化されることはなかった．

3　導出される 1 変数多項式の次数

3.1　グレブナー基底による計算

宮城らの結果自体は，最初に与えられた多項式が下記の形をしていることから，Bézout の定理が与える次数の上限に一致しているとみることができる．

$$\begin{cases} f_1 &=& x^n - y^n - a \\ f_2 &=& y^n - z^n - b \\ f_3 &=& x + y + z - c \end{cases} \tag{8}$$

そこで,「明元算法」に記されたとおりの値 ($a = 4^n - 3^n$，$b = 3^n - 2^n$，$c = 9$) を用いて，x のみを含む 1 変数多項式を計算し，その次数を確かめてみたものが，表 1 である．ここでは，Maple12[8] を用いて，イデアル $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ に対する辞書式順序 ($z > y > x$) のグレブナー基底を計算した．

この表から分かるように，n が 3 の倍数のときのみ，1 変数多項式の次数は $n^2 - 2$ となり，宮城らの結果と一致しない．立法冪の場合，式 (7) に対して，$y^3 = x^3 - 37$ を代入して展開・整理すると，$6561x^7 - 137781x^6 + \cdots$ という形になり，実際には x^9, x^8 の項は残らないのであ

るが，この事実に宮城は気付かなかったと思われる．なお当然のことながら，この式は，上述のグレブナー基底に含まれる 1 変数多項式 $\varphi(x)$ とは定数倍の違いしかない．

さらに比較のため，a, b, c をパラメータとしたまま，$I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset \mathbf{Q}(a, b, c)[x, y, z]$ に対するグレブナー基底も計算した．この場合は，1 変数多項式を記号的に求めるのは記憶容量の点で困難（計算可能だったのは，$n = 2, 3, 4, 5$ まで）なので，全次数逆辞書式順序で基底を計算したのち，イデアルの線形次元 $\dim_K R/I$ [2] を求め，$n = 2, \ldots, 12$ のすべてにおいて表 1 の値と一致することを確認した．

表 1: 得られた 1 変数多項式の次数

n	$\deg \varphi(x)$
2	4
3	7
4	16
5	25
6	34
7	49
8	64
9	79
10	100
11	121
12	142

3.2 包括的グレブナー基底系による解析

前節で示した $\mathbf{Q}(a, b, c)[x, y, z]$ における計算は，その過程で現れる主係数（a, b, c の多項式）が 0 でないとその都度仮定して，グレブナー基底計算を続けた結果に相当する．

したがって，表 1 の結果は generic ではあるが，パラメータ a, b, c の値によって場合分けがおきないかどうかをより詳細に調べるためには，包括的グレブナー基底系 CGS[12] を求める必要がある．ここでは，数式処理システム Reduce3.8[4] の Redlog パッケージに組み込まれている gsys 関数を使用し，単項式順序としては $z > y > x$ の全次数逆辞書式順序 revgradlex を適用した．その結果は以下のようにまとめられる．

(i) $n = 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11$（すなわち $3 \nmid n$）の場合
CGS は断片に分かれない．すなわち，a, b, c の値の組み合わせに関わらず，イデアルの線形次元は $\dim_K R/I = n^2$ をみたす．

(ii) $n = 3$ の場合
CGS は以下の 5 つの断片に分かれる．

(1) $c \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dim_K R/I = 7$

(2) $c = 0$ & $a^2 + ab + b^2 \neq 0$ & $2a + b \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dim_K R/I = 3$
(3) $c = 0$ & $b \neq 0$ & $2a + b = 0$ $\Rightarrow$ $\dim_K R/I = 3$
(4) $c = 0$ & $a^2 + ab + b^2 = 0$ & $2a + b \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dim_K R/I = \infty$
(5) $c = 0$ & $a = 0$ & $b = 0$ $\Rightarrow$ $\dim_K R/I = \infty$
すなわち，$c \neq 0$ が「7 個の解を持つ」ための必要十分条件であることが得られた．

(iii) $n = 6$ の場合
CGS は以下の 3 種類の断片群に分かれる．
(1) $c \neq 0$ $\Rightarrow$ $\dim_K R/I = 34$
(2) $c = 0$ & $\cdots$ (以下略) $\Rightarrow$ $\dim_K R/I = 24$
(3) $c = 0$ & $\cdots$ (以下略) $\Rightarrow$ $\dim_K R/I = \infty$
すなわち，$c \neq 0$ が「34 個の解を持つ」ための必要十分条件である．

(iv) $n = 9, 12$ の場合
$n = 3, 6$ の場合と同様に，$c \neq 0$ がひとつの断片をなすので，これは $\dim_K R/I = n^2 - 2$ であるための十分条件である．$n = 3, 6$ の場合から，$c \neq 0$ が必要条件でもあることが予想されるが，$c = 0$ を含む断片は非常に複雑になるため，計算で確認することは困難である．

3.3 解の個数についての証明

§3.1, §3.2 の計算結果は，以下の命題が成り立つことを示唆している．

命題 1
式 (8) が表す連立代数方程式 $\{f_1 = f_2 = f_3 = 0\}$ は，

- $3 \nmid n$ のとき，a, b, c の値に関係なく，n^2 個の解を持つ．
- $3 \mid n$ かつ $c \neq 0$ のとき，$n^2 - 2$ 個の解を持つ．

この事実を確認するため，式 (8) が表す連立代数方程式の無限遠点を含めた解の個数を調べる．Bézout の定理によれば，有限解と無限遠点解の合計が，重複度を込めて n^2 個となる．

射影空間を考えて，斉次座標 $(x : y : z : t)$ を導入すると，式 (8) は，以下のように書き換えられる．

$$\left\{\begin{array}{lllll} f_1' & = & t^n f_1(x/t, y/t, z/t) & = & x^n - y^n - at^n \\ f_2' & = & t^n f_2(x/t, y/t, z/t) & = & y^n - z^n - bt^n \\ f_3' & = & t f_3(x/t, y/t, z/t) & = & x + y + z - ct \end{array}\right. \tag{9}$$

命題 1 は，$t = 1$ に対応する有限解について述べているので，$t = 0$ に対応する無限遠点の解について言い換えると，以下のようになり，こちらを証明する．

命題 2
式 (8) が表す連立代数方程式 $\{f_1 = f_2 = f_3 = 0\}$ は，

- $3 \nmid n$ のとき，a, b, c の値に関係なく，無限遠点解を持たない．
- $3 \mid n$ かつ $c \neq 0$ のとき，無限遠点解をちょうど 2 個持つ．

証明　斉次化された多項式 (9) に対して，$t=0$ とおいた方程式を考える．(したがって，以下の議論は，a,b,c の値に依存しない．)

$$\begin{cases} x^n - y^n &= 0 \\ y^n - z^n &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases} \tag{10}$$

この方程式の $(0,0,0)$ 以外の解を $\left(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\right)$ とすると，$\alpha_x^n = \alpha_y^n$，$\alpha_y^n = \alpha_z^n = \alpha_x^n$ が成り立つ．η, η' を 1 の n 乗根とすると，

$$\begin{cases} \alpha_y = \eta\alpha_x & (\eta^n = 1) \\ \alpha_z = \eta'\alpha_x & (\eta'^n = 1) \end{cases}$$

と表せる．よって，$x+y+z = \alpha_x(1+\eta+\eta') = 0$ をみたすが，このとき，

$$1+\eta+\eta' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \eta \text{ と } \eta' \text{ は複素共役}$$

が成り立つので，

$$\eta = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad \eta' = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

と表せる．$1+\eta+\eta' = 1+2\cos\frac{2k\pi}{n} = 0$ より，$\cos\frac{2k\pi}{n} = -\frac{1}{2}$，　すなわち

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2}{3}\pi,\ \ \frac{4}{3}\pi \qquad \left(0 \le \frac{2k\pi}{n} < 2\pi\right)$$

を得る．よって，n が 3 の倍数のときに限り，式 (9) が表す連立代数方程式 $\left\{f_1' = f_2' = f_3' = 0\right\}$ は，2 つの無限遠点の解 $(x:y:z:t) = (1:\zeta:\zeta^2:0)$, $(1:\zeta^2:\zeta:0)$（ただし ζ は 1 の 3 乗根）を持つ．∎

したがって，例えば $n=3$ のとき，$c \neq 0$ であれば，有限解 7 個（重複度込）と無限遠点解 2 個（各 1 重）の，合わせて 9 個の解が存在していることになる．

一方で，$n=3$, $c=0$ に対して $\dim_K R/I = 3$ となる場合は，例えば，前節 CGS 計算のケース (3)「$c=0$, $b\neq 0$, $2a+b=0$」を考えて，$a=-1$, $b=2$, $c=0$ を式 (9) に代入すると

$$\begin{cases} f = x^3 - y^3 + t^3 \\ g = y^3 - z^3 - 2t^3 \\ h = x+y+z \end{cases} \tag{11}$$

となる．イデアル $J = \langle f,g,h\rangle$ を $\mathbf{Q}[x,y,z,t]$ で準素分解すると

$$J \;=\; \langle x,\ y-t,\ y+z\rangle \ \cap\ \langle x,\ y+z,\ y^2+ty+t^2\rangle \ \cap\ \langle x^2+xy+y^2,\ x+y+z,\ t^3\rangle$$

が得られ，この第 3 成分は，2 つの無限遠点の解 $(1:\zeta:\zeta^2:0)$, $(1:\zeta^2:\zeta:0)$ の重複度がそれぞれ 3 であることを意味している．よって，第 1，第 2 の成分が与える有限解 3 個と，無限遠点解が重複度を込めて 6 個で，この場合も合計 9 個の解とみることができる．

3.4 方程式が退化しないためにパラメータがみたすべき条件

§3.2 では，$n = 3$ のとき，式 (8) が表す方程式が有限解を 7 個持つための必要十分条件が $c \neq 0$ であることを計算で確かめたが，これは，Jacobian criterion の変形版（Eisenbud[3] Corollary 16.20, p.402) を用いて示すことができる．以下の計算は，$n = 3k$ の場合に容易に拡張できるので，一般に n が 3 の倍数の場合，

$$\text{式 (8) が表す連立代数方程式が } n^2 - 2 \text{ 個の有限解を持つ} \quad \Leftrightarrow \quad c \neq 0$$

が成り立ち，§3.2 の計算から導かれた予想は正しいことが分かる．

実際の確認は以下のように行う．斉次化した多項式 (9) において，$z = -x - y + ct$ を第 2 式に代入すれば，実質的に 2 変数である．

$$\begin{cases} f = x^3 - y^3 - at^3 \\ g = y^3 - (-x - y + ct)^3 - bt^3 \end{cases} \tag{12}$$

イデアル $I = \langle f, g \rangle$ の Jacobian 行列を作って上記 Corollay 16.20 を適用すると，

$$I \text{ の零点が特異点である} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times 2 \text{ のすべての小行列式がその零点で 0 になる}$$

という条件を用いて判定できる．今，ζ を 1 の 3 乗根として，2 つの無限遠点の解 $(x : y : t) = (1 : \zeta : 0)$, $(1 : \zeta^2 : 0)$ の重複度を調べたい．まず，$x = 1$, $y = \zeta$, $t = 0$ を代入すると，

$$\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_t \\ g_x & g_y & g_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3\zeta^2 & 0 \\ 3\zeta & -3 & -3c\zeta \end{bmatrix} \tag{13}$$

ここから，3 つの 2×2 の小行列式を計算する．

$$d_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3\zeta^2 \\ 3\zeta & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3\zeta & -3c\zeta \end{vmatrix} = -9c\zeta, \quad d_3 = \begin{vmatrix} -3\zeta^2 & 0 \\ -3 & -3c\zeta \end{vmatrix} = 9c$$

したがって，$\forall d_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$ であるから，否定をとれば，

$$(1 : \zeta : 0) \text{ の重複度が } 1 \quad \Leftrightarrow \quad c \neq 0$$

も言える．もうひとつの無限遠点解 $(1 : \zeta^2 : 0)$ についても同様に，重複度 1 $\Leftrightarrow$ $c \neq 0$ なので，Bézout の定理と合わせて，

$$n = 3 \text{ のとき，式 (8) が表す連立代数方程式が 7 個の有限解を持つ} \quad \Leftrightarrow \quad c \neq 0$$

が導かれた．

一方で，$c = 0$ の場合は，§3.3 における計算例（$a = -1$, $b = 2$）でみたように，2 つの無限遠点の解 $(x : y : z : t) = (1 : \zeta : \zeta^2 : 0)$, $(1 : \zeta^2 : \zeta : 0)$ が 2 以上の重複度を持ち（$n = 3$ のとき 3 重，$n = 6$ のとき 6 重，…），その分だけ有限解の個数が少なくなるケース（$n = 3$ では $9 - 2 \cdot 3 = 3$，$n = 6$ では $36 - 2 \cdot 6 = 24$，…）が発生する．

4 おわりに

宮城清行が「明元算法」で例題として採り上げた連立代数方程式の解について論じた．1 変数多項式を導くために当時用いられた消去計算法が正しいことは確かめられたが，宮城は最終結果の 1 変数多項式を実際に計算しなかった（複雑すぎてできなかった）ため，次数が常に n^2 になるわけではないことに気付かなかったと思われる．現代の数式処理が，和算の研究に対して多少なりとも貢献できる事例となることを期待したい．

なお，ここで採り上げられた方程式は,「古今算法記」遺題第 3 問

$$\begin{cases} f_1 &= x^3 - y^3 - a \\ f_2 &= y^3 - z^3 - b \\ f_3 &= z^3 - w^3 - c \\ f_4 &= x + y + z + w - d \end{cases} \tag{14}$$

から，変数をひとつ減らして，次数を変化させた形に相当する.「明元算法」は，澤口・関・建部らの結果を受けて書かれたものであるから，問題のオリジナリティーとしては，澤口に帰するべきものであろう．

参 考 文 献

[1] 赤坂隆: 数値計算, コロナ社, 東京, 1967.

[2] Cox, D., Little, J., and O'Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms (2nd ed.)*, Springer, N.Y., 1997. (邦訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 2000).

[3] Eisenbud, D.: *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, N.Y., 1995.

[4] Hearn, A. C.: Reduce User's Manual (Ver. 3.8), Santa Monica, 2004.

[5] 平山諦: 学術を中心とした 和算史上の人々, 筑摩書房, 東京, 2008.

[6] 木村欣司, 平野照比古, 横山和弘: 関孝和の問題を解く, 数式処理 (*J. Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*), **11**(3&4), 2005, 35–42.

[7] 小松彦三郎: 関東の消長法と関西の冪乗演段, 京都大学数理解析研究所講究録, **1583**, 2008, 19–39.

[8] Maplesoft: Maple 12 ユーザーマニュアル, Maplesoft, 東京, 2008.

[9] Moritsugu, S. and Arai, C.: An Application of Computer Algebra to Studies on the History of Japanese Mathematics, 数式処理 (*Bulletin of Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*), **15**(2), 2008, 3–13.

[10] 日本学士院 (編): 明治前 日本数学史 第三巻, 岩波書店, 東京, 1957.

[11] 小川束: 関孝和「発微算法」－現代語訳と解説, 大空社, 東京, 1994.

[12] 佐藤洋祐: 包括的グレブナー基底 (系) 入門, 数式処理 (*J. Japan Soc. Symbolic and Algebraic Computation*), **14**(1), 2007, 3–15.