数式処理 *J.JSSAC (2005)*
Vol. 12, No. 1, pp. 57 - 67

大会論文

同次線型常微分作用素の因子分解について

村上 弘*

東京都立短期大学

(Received 2004/11/2　Revised 2005/06/23)

概　要

In this paper the reducibility and factoring for the homogeneous linear ODE operator of higher order is studied mainly for the 2nd order case. The determination of reducibility and the construction of factors are not difficult for the 2nd order ODE if the coefficients of the factorization are restricted to polynomials. The decision and the construction are also possible when the coefficients of the factorization are rational functions of bounded degrees given in advance. For the operator of the hypergeometric differential equation of Gauss, the simple reducibility condition on the parameters has been well known, and the construction of factors is easy and can be made explicitly.

1　前置き

線型常微分方程式 (L-ODE) を数式処理で扱うのに有用な事柄を，二階の場合を中心に紹介する．

一階 L-ODE には一般解を表す「解の公式」が良く知られているが，二階以上の L-ODE には同次の場合でも一般解の公式は存在しない．高階の L-ODE の場合，対応する同次方程式の特解が一つ得られれば階数を 1 だけ低下できるので，二階の「非同次」L-ODE に対応する「同次」方程式の特解が得られると一階 L-ODE に帰着できて一般解が得られる．

二階の L-ODE は，その係数から決まる「不変式」I を右辺に置いた非線型一階 ODE の Ricatti 方程式 $\mu' - \mu^2 = I$ の特解を用いて一般解を導けるが，Ricatti 方程式の特解は一般には閉じた式としては得られない．不変式 I が多項式の場合，Ricatti 方程式の多項式の特解の存在判定，存在する場合は具体的な構成ができること，Ricatti 方程式の特解から元の L-ODE の因子分解が容易にできることを示す．さらに，Ricatti 方程式の右辺の不変式が有理函数の場合に，Ricatti 方程式の特解を次数に上限を設けた有理函数の範囲に制限すれば，存在判定と存在する場合の構成が可能なことを示す．典型的且つ応用上重要な二階同次 L-ODE である Gauss の超幾何微分方程式の場合は，「有理函数係数範囲での可約性」の必要充分条件が良く知られており，可約な場合の因子分解は容易に構成できる．

*murakami@tmca.ac.jp

またさらに，代数方程式の理論に於ける剰余定理，因子分解，互除法，終結式，などとの類似性を同次 L-ODE に対して追求する．代数方程式には L-ODE が対応し，多項式には L-OD 作用素が対応し，次数は階数が対応する．方程式の根には L-ODE の非自明な解が対応し，異なる根には L-ODE の線形独立な解が対応する．代数方程式では根に対応する一次因子で多項式が割り切れるが，L-ODE では非自明解に対応する一階の L-OD 作用素で元の L-OD 作用素が右側から割り切れる．また，代数方程式論の多項式間の整除関係，互除法による最大公約因子の計算，共通解には，L-OD 作用素間の整除関係，互除法による最大公約作用素，L-ODE の共通解が対応する．

高階の L-ODE の作用素が二個の因子の積に分解するなら，右側の因子に対応する同次 L-ODE の任意の解は元の L-ODE の特解になる．元の L-ODE に対応する非同次方程式を解くことが各々の因子の非同次方程式を解くことに還元され，問題が分解される．高階の線形作用素が一階の線形作用素の積に分解可能なら，一階 L-ODE の「解の公式」を繰り返し適用すると，非同次の場合も含めて一般解が求積法により得られる．

最後に，L-ODE を扱う際に，ある L-ODE の式が公式表中どの公式に適合し得るかの検索に L-ODE の不変式と半標準形，Laguerre-Forsyth の標準型が役立つ可能性を述べる．

本稿では紙数の関係から，大会では示した幾つかの具体計算例や基本解のモノドロミーと可約性の関係の記述は省いた．

2 簡単な準備

一階の L-ODE の解の公式: 一階の正規形一般 L-ODE:$D_x y + Py = Q$ の一般解は，C を任意定数として $y(x) = \exp\left(-\int^x P(t)\,dt\right)\left\{ C + \int^x Q(s)\,\exp\left(\int^s P(t)\,dt\right) ds \right\}$.

二階同次 L-ODE の基本解と Wronskian: 同次方程式:$Ly = D_x^2 y + 2PD_x y + Qy = 0$ の一組の基本解を y_1, y_2 とし，Wronskian:$\mathbf{W}[y_1, y_2] \equiv \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ を考えると，$\mathbf{W}' = -2P\mathbf{W}$ が容易に示され，$\mathbf{W}(x) = \mathrm{Const}\cdot\exp\left(-\int^x 2P(t)\,dt\right)$. 三階以上の L-ODE の基本解の Wronskian にも同様の関係が示せる．

同次方程式の特解と非同次方程式の一般解: 二階の非同次 L-ODE:$Ly = D_x^2 y + 2PD_x y + Qy = R$ に於いて同次方程式 $Lw = 0$ の非自明な任意の特解を w とし，$y = v\,w$ と置くと $D_x^2 v + 2\{P + (\log w)'\}D_x v = R/w$. この $D_x v$ の一階 L-ODE を積分定数 C_1 を用いて解き，定数 C_2 を用いて不定積分すると v が得られる．つまり $H(t) \equiv w(t)^2 \exp\left(2\int^t P(x)\,dx\right)$ と置いて，$v(x) = C_2 + \int^x H(s)^{-1}\left\{C_1 + \int^s (H(t)R(t)/w(t))\,dt\right\} ds$ により y の一般解は $y = v\,w$ と書ける．このことから，同次方程式 $Ly = 0$ の非自明な特解 w が既知なら，非同次方程式 $Ly = R$ の一般解を求積法で表示可能なことが判る．

3 Ricatti 方程式

二階同次 L-ODE:$Ly = D_x^2 y + 2PD_x y + Qy = 0$ に付随する Ricatti 方程式を紹介する．

二階同次 L-ODE と Ricatti 方程式: 二階同次 L-ODE:$Ly = 0$ の基本解の比 $z = y_1/y_2$ の満たす ODE は $\{z; x\}_s = 2I$. 左辺は函数 z の x による Schwarz 導函数: $\{z; x\}_s \equiv (z''/z')' - \frac{1}{2}(z''/z')^2$ を表す．右辺中の I は $I = Q - P' - P^2$ で二階同次 L-ODE:$Ly = 0$ の不変式と呼ばれる量である．Schwartz 導函数の $GL(2, \mathbf{C})$ 不変性: $\{z; x\}_s = \{(\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta); x\}_s$ により，$\{y_1/y_2; x\}_s = \{(\alpha y_1 + \beta y_2)/(\gamma y_1 + \delta y_2); x\}_s$ よって方程式 $\{z; x\}_s = 2I$ は基本解の選択に依らない．そこで $z''/z' = 2\mu$ と置くと，μ の方程式は，一階非線型 ODE の「Ricatti 方程式」:$\mu' - \mu^2 = I$ になる．

Ricatti 方程式の特解と同次方程式の解法: Ricatti 方程式の解は一般には初等的な閉じた式で表せないが, 特解 μ が得られると，$z''/z' = 2\mu$ だから，$D_x z = \exp\left(\int^x 2\mu(t)\,dt\right)$ が $D_x z$ の特解．$\mathbf{W}$ を y_1, y_2 の Wronskian とすると，$D_x z = D_x(y_1/y_2) = y_2{}^{-2}\,\mathbf{W}$ だから，$\mathbf{W} = \mathrm{Const}\cdot\exp\left(-\int^x 2P(t)\,dt\right)$ と併せて，$y_2 = (\mathbf{W}/D_x z)^{1/2} = \exp\left(-\int^x (P(t) + \mu(t))\,dt\right)$，$y_1 = y_2, z = \exp\left(-\int^x (P(t) + \mu(t))\,dt\right)$ $\int^x \exp\left(\int^t 2\mu(s)\,ds\right)dt$. すると同次方程式 $Ly = 0$ の一般解は，C_1, C_2 を任意定数として，不定積分で $y = \exp\left(-\int^x (P(t) + \mu(t))\,dt\right)\left\{C_1 + C_2 \int^x \exp\left(\int^t 2\mu(s)\,ds\right)dt\right\}$ と書ける．逆に y をこの形に置くと，μ は Ricatti 方程式の特解になる．

解の表現形式を上記の y の形式に定めたとき，一般解が常に初等函数となる為の必要十分条件は「$P + \mu$ の積分が初等函数」且つ「$\int^x \exp\left(\int^t 2\mu(s)\,ds\right)dt$ が初等函数」が成り立つことである．

4 二階の同次線型常微分作用素と可約性

函数 P, Q を係数に持つ正規形二階同次 L-OD 作用素の因子分解が可能, つまり $D_x^2 + 2PD_x + Q = (D_x + S)(D_x + R)$ のとき可約とする．可約ならば函数 R と S が存在し, 関係 $2P = R + S$, $Q = R' + SR$ を満たす．可約性は函数 R, S をある指定された範囲に制限して論じる．非正規形で係数 A, B, C を持つ二階同次 L-OD 作用素の可約性も同様に定義する: $AD_x^2 + 2BD_x + C = (\alpha D_x + S)(\beta D_x + R)$. 因子の係数 α, β, S, R も，函数の範囲を指定して分解を論じる．(注意:可約でも分解が一通りとは限らない．)

4.1 正規形二階同次 L-OD 作用素の因子分解 (多項式係数)

$2P = R + S$, $Q = R' + SR$ より S を消去すると，$R' = Q - 2PR + R^2$. これは一般 Ricatti 方程式で，さらに $\mu \equiv R - P$, $I \equiv Q - P^2 - P'$ と置くと，(標準の)Ricatti 方程式 $\mu' - \mu^2 = I$ になる．P, Q が多項式だから不変式 I も多項式で，μ が多項式の特解を持つことと，作用素が多項式を係数とする範囲で可約になることとが同値.

Ricatti 方程式の「多項式解」の決定法: μ が多項式なら Ricatti 方程式 $\mu' - \mu^2 = I$ の左辺の次数は常に $2\deg\mu$ で，右辺の多項式の次数は $\deg I$ だから $\deg I$ が奇数なら解がない．$\deg I$ が偶数ならば，$\deg\mu = (1/2)\deg I$ のはずだから，多項式解を $\mu = \sum_{j=0}^{(1/2)\deg I} u_j x^j$ と置いて代入し，係数比較法により高次側から解いて決定できる．最高次の係数は二次方程式となり，他の係数は一次方程式．一般的には条件過剰で解がない．また，解 μ は高々二通りであることも判る．多項式解 μ が存在すると，分解係数の R と S は，$R = P + \mu$, $S = P - \mu$ により多項式として求まる．

4.2 非正規形の二階同次 L-OD 作用素の因子分解の方法 (多項式係数)

非正規形の二階同次 L-OD 作用素が多項式係数の範囲で分解可能とすると，$AD_x^2+2BD_x+C=(\alpha D_x+S)(\beta D_x+R)$. 係数 A,B,C,α,β,S,R は x の多項式．係数の比較から三個の式:$A=\alpha\beta$,$2B=S\beta+\alpha(\beta'+R)$, $C=SR+\alpha R'$ を得る．二番目の式を，三番目に入れた式: $[\{2B-\alpha(\beta'+R)\}/\beta]R+\alpha R'=C$ をさらに R について整理した式: $(\alpha R)'+\{(2B-A')/\beta\}R-(\alpha/\beta)R^2=C$ を平方完成すると，$A\{\alpha R-(B-A'/2)\}'-\{\alpha R-(B-A'/2)\}^2=AC-(B-A'/2)^2-A(B-A'/2)'$. この右辺を $J\equiv AC-(B-A'/2)^2-A(B-A'/2)'$ と置くと J は多項式で，さらに $\mu\equiv\alpha R-(B-A'/2)$ と置くと α,R が多項式なら μ も多項式で，$A\mu'-\mu^2=J$.

この式に μ の多項式解が存在しなければ可約でない．いま μ が $\deg\mu\geq\deg A$ で，且つ $\deg\mu>(1/2)\deg J$ を満たせば解と成り得ないことが容易に判るので $\deg\mu$ の上限の一つが粗く $\max(\deg A, (1/2)\deg J)$ により与えられる．次数の上限が決まると，係数比較法により連立代数方程式を解くと μ の存在判定と構成ができる．

多項式解 μ が存在すれば，関係 $\alpha\beta=A$ を満たす A の因子 α と β に就いて，$R=\{\mu+(B-A'/2)\}/\alpha$,$S=\alpha'-\{\mu-(B-A'/2)\}/\beta$ の双方を多項式にする組合せの有無を調べる．その様な組合せが存在すれば多項式係数の範囲で可約，存在しなければ可約ではない．

4.3 正規形二階同次 L-OD 作用素の分解 (有理函数係数)

正規形の場合に Ricatti 方程式 $\mu'-\mu^2=I$ を導く迄の過程は同じで，但し I,μ は共に有理函数とする．μ の有限個の極のうち, I の極であるものを α_p,$p=1,2,\cdots$ とし, I の極でないものを β_q,$q=1,2,\cdots$ とし, 部分分数分解: $\mu=U+\sum_p\sum_{d_p=1}^{n_p}e_{p,d_p}/(x-\alpha_p)^{d_p}+\sum_q\sum_{\delta_q=1}^{m_q}f_{q,\delta_q}/(x-\beta_q)^{\delta_q}$, と，その微分は: $\mu'=U'+\sum_p\sum_{d_p=2}^{n_p+1}\{-(d_p-1)e_{p,(d_p-1)}\}/(x-\alpha_p)^{d_p}+\sum_q\sum_{\delta_q=2}^{m_q+1}\{-(\delta_q-1)f_{q,(\delta_q-1)}\}/(x-\beta_q)^{\delta_q}$. μ^2 を μ の係数 $\{e_{p,d_p}\}$,$\{f_{q,\delta_q}\}$ から決まる係数 g_{p,d_p},h_{q,δ_q} を用いて書く．$\mu^2=V+\sum_p\sum_{d_p=1}^{2n_p}g_{p,d_p}/(x-\alpha_p)^{d_p}+\sum_q\sum_{\delta_q=1}^{2m_q}h_{q,\delta_q}/(x-\beta_q)^{\delta_q}$,. 但し，$e_{p,n_p}\neq0$,$f_{q,m_q}\neq0$, $g_{p,2n_p}=(e_{p,n_p})^2\neq0$,$h_{q,2m_q}=(f_{q,m_q})^2$. U,V は多項式部分である．同様に I の展開を: $I=W+\sum_p\sum_{d_p=1}^{N_p}t_{p,d_p}/(x-\alpha_p)^{d_p}$，$t_{p,N_p}\neq0$, と書くと，$U'-V=W$,$\deg V=2\deg U$ ゆえ，$\deg W$ は偶数であることが必要で，$\deg U=(1/2)\deg W$. I が持つ極 α_p の近傍で，極の係数を比較すると，$-(d_p-1)e_{p,(d_p-1)}-g_{p,d_p}=t_{p,d_p}$. 左辺は，特に最高位に於いては, $n_p>1$ ならば, 最高位数は $2n_p$ で係数は $-(e_{p,n_p})^2$ であり, $n_p=1$ ならば, $d_p=2$ が最高位数だから，$-e_{p,1}-(e_{p,1})^2=-e_{p,1}(1+e_{p,1})$ となる．よってこれより，$N_p\geq2$ なら N_p は偶数であることが必要で，$n_p=N_p/2$ となるが，$N_p=1$ の場合でも $n_p=1$ 且つ $e_{p,1}=-1$ の可能性が残る．I の極とは異なる μ の極 β_p の近傍では，$-(\delta_q-1)f_{q,\delta_q-1}-h_{q,\delta_q}=0$ で，特に最高位を考えると，$m_q>1$ なら最高位は $2m_q$ ゆえ，$h_{q,2m_q}=0$ となり，$h_{q,2m_q}=(f_{q,m_q})^2\neq0$ に矛盾する．よって，$m_q=1$ でなければならないから，2 位の部分から $-f_{q,1}-(f_{q,1})^2=0$ が導かれ，$f_{q,1}\neq0$ だから，$f_{q,1}=-1$ となり, 結果として μ の形として: $\mu=U+\sum_p\sum_{d_p=1}^{\max\{N_p/2,1\}}e_{p,d_p}/(x-\alpha_p)^{d_p}-\sum_q(x-\beta_q)^{-1}$ を仮定すれば良い．(但し，$\deg U=(1/2)\deg W$，また $N_p=1$ の極に対しては $e_{p,d_p}=-1$.) 添字 q の個数の上限は決まらないが，予め上限を仮定すると，μ が存在すればその係数は高々自由度 1 の不定性で決定できる．μ の有理函数としての次数の上限をまず先に与えるならば，その制約内での L-ODE の分解の判定は原理的には可能である．

結局，いま有理函数解 μ が求まったとすれば，$\mu=U+\sum_p\sum_{d_p=1}e_{p,d_p}/(x-\alpha_p)^{d_p}-\sum_q(x-\beta_q)^{-1}$

で，$S = P - \mu$, $R = P + \mu$ により，有理函数係数による因子分解 $D_x^2 + 2PD_x + Q = (D_x + S)(D_x + R)$ が決まる．そうして一階の同次 L-ODE:$(D_x + R)\varphi = 0$ を解くと，元の二階同次方程式の特解が得られる．

いま有理函数 $R = P+\mu$ を部分分数分解し, $R = R_0+R_2+R_1$ とする．但し, R の正則部 (多項式部) が R_0, 二位以上の高次極の項を集めたものを R_2, 残りの単純極の項を集めたものを R_1 とする．そのとき定数倍を無視して φ は $\varphi(t) = \exp(-\int^t R_0(x)\,dx) \cdot \exp(-\int^t R_2(x)\,dx) \cdot \exp(-\int^t R_1(x)\,dx) = \exp(T_0(t)) \cdot \exp(T_2(t)) \cdot \exp(T_1(t))$. ここで $-R_0$ の積分 T_0 は多項式だから，R_0 が 0 でなければ, $\varphi(t)$ は $t = \infty$ で $\exp(T_0(t))$ の形の真性特異点を持つ．$R_2(x) = \sum_j \sum_{d_j=2} \nu_{j,d_j}/(x - c_j)^{d_j}$ も 0 でなければ，その積分 $T_2(t)$ は有理函数で，有界な位置に極を持ち，その極の位置は $\varphi(t)$ の真性特異点になる．残りは $R_1 = \sum_j \nu_{j,1}/(x - c_j)$ とすると，$\exp(T_1(t)) = \prod_j (t - c_j)^{-\nu_{j,1}}$.

5 Gauss の超幾何微分方程式の可約性 (有理函数係数)

二階の L-ODE の例に，応用上特別重要な Gauss の超幾何微分方程式 (HGDE): $x(1 - x)D_x^2 y + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]D_x y - \alpha\beta y = 0$ を取り上げる．HGDE では有理函数係数範囲での可約性判定の条件が知られており [7]，可約な場合の因子構成も著しく容易である．

定理 1

標準パラメタ α, β, γ を持つ Gauss の HGDE は，$\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$ の 4 つのいずれかが整数のとき，且つそのときに限り (有理函数係数の範囲で) 可約.

可約な場合の特解: Gauss の HGDE が可約の場合は，超幾何級数 ${}_2F_1$ が有限項で切れる特解が採れる．Gauss の HGDE はパラメタ α と β について対称だから，α が整数の場合と $\gamma - \alpha$ が整数の場合を示せば充分である．(注意:超幾何級数 ${}_2F_1$ の第 3 パラメタが 0 以下の整数で生じる分母の 0 は，解の規格化で除け，最終結果には影響しない．)

- **α が整数 $n(> 0)$ の場合:** 特解 $y = x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma-n-\beta}\ {}_2F_1(1 - n, 1 - \beta, 2 - \gamma; x)$ の ${}_2F_1$ は高々 $(n - 1)$ 項の x の多項式.
  $R = -(1 - \gamma)/x + (\gamma - n - \beta)/(1 - x) - {}_2F_1'(1 - n, 1 - \beta, 2 - \gamma; x) \big/ {}_2F_1(1 - n, 1 - \beta, 2 - \gamma; x)$.
- **α が整数 $-n(\le 0)$ の場合:** 特解 $y = {}_2F_1(-n, \beta, \gamma; x)$ は高々 n 項の x の多項式.
  $R = -{}_2F_1'(-n, \beta, \gamma; x) \big/ {}_2F_1(-n, \beta, \gamma; x)$.
- **$\gamma - \alpha$ が整数 $n(> 0)$ の場合:** 特解 $y = x^{1-\gamma}\ {}_2F_1(1 - n, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x)$ の ${}_2F_1$ は高々 $(n - 1)$ 項の x の多項式.
  $R = -(1 - \gamma)/x - {}_2F_1'(1 - n, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x) \big/ {}_2F_1(1 - n, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x)$.
- **$\gamma - \alpha$ が整数 $-n(\le 0)$ の場合:** 特解 $y = (1 - x)^{-n-\beta}\ {}_2F_1(-n, \gamma - \beta, \gamma; x)$ の ${}_2F_1$ は高々 n 項の x の多項式.
  $R = (-n - \beta)/(1 - x) - {}_2F_1'(-n, \gamma - \beta, \gamma; x) \big/ {}_2F_1(-n, \gamma - \beta, \gamma; x)$.

整数 n が大のとき，それに対応して有理函数 R の次数も大となるが，有限項で切れる Gauss 超幾何級数 ${}_2F_1$ を用いた構成は容易に計算できる．R が構成されたら $S = 2P - R$ とすると，正規化された HGDE は $(D_x + S)(D_x + R)$ と分解される．

6 高階の線型常微分作用素の因子分解

正規形/非正規形の線型常微分 (L-OD) 作用素の「可約性」を以下のように決める．

正規形の場合: n 階の同次の正規形 L-ODE:$D_x^n y + P_1 D_x^{n-1} y + \cdots + P_n y = 0$ あるいはこれに対応した正規形 L-OD 作用素を考え，$n = n_1 + n_2$, $n_1 > 0, n_2 > 0$ で n 個の係数 (函数) $S_1, \cdots, S_{n_1}; R_1, \cdots, R_{n_2}$ により，$D_x^n + P_1 D_x^{n-1} + \cdots + P_n = (D_x^{n_1} + S_1 D_x^{n_1-1} + \cdots + S_{n_1})(D_x^{n_2} + R_1 D_x^{n_2-1} + \cdots + R_{n_2})$ という因子分解を満たせば可約とする．係数 $S_1, \cdots, S_{n_1}; R_1, \cdots, R_{n_2}$ は，ある与えられた函数の範囲の中に制限して議論する．

非正規形の場合: 非正規形の場合にも，n 階の同次な非正規形 L-ODE: $P_0 D_x^n y + P_1 D_x^{n-1} y + \cdots + P_n y = 0$ あるいはこれに対応した非正規形 L-OD 作用素を考え，$n = n_1 + n_2, n_1 > 0, n_2 > 0$ で $(n+2)$ 個の係数函数 $S_0, \cdots, S_{n_1}; R_0, \cdots, R_{n_2}$ により，$P_0 D_x^n + P_1 D_x^{n-1} + \cdots + P_n = (S_0 D_x^{n_1} + S_1 D_x^{n_1-1} + \cdots + S_{n_1})(R_0 D_x^{n_2} + R_1 D_x^{n_2-1} + \cdots + R_{n_2})$ という分解を持てば可約とする．係数 $S_0, \cdots, S_{n_1}; R_0, \cdots, R_{n_2}$ は，ある与えられた函数の範囲の中に制限して可約性を論じる．(注意:いずれの場合も，可約の場合に分解が一意とは限らない．)

7 n 階と一階の同次正規形 L-ODE が共通解を持つ条件

n 階の同次正規形の L-ODE: $L_n\left(\mathbf{P}\middle|x, \varphi\right) = D_x^n y + \sum_{\ell=1}^n \begin{pmatrix} n \\ \ell \end{pmatrix} P_\ell D_x^{n-\ell} \varphi = 0$ が，一階の方程式 $\varphi' + a\varphi = 0$ と共通解を持つ場合の a の条件を求める．以下，係数 (函数) を $P_1 = p$, $P_2 = q$, $P_3 = r$, $P_4 = s$, $P_5 = t$, $P_6 = u, \cdots$ と書く．係数 a を $a = p + \mu$ と置くと，μ の $(n-1)$ 階の非線型 ODE になる．$n = 2$ の場合が通常の Ricatti 方程式で，これらは Ricatti 方程式の一般化と見做せる．いま

$$
\begin{aligned}
J_2 &= q - p^2 - p' = F_2(-p) - p' , \\
J_3 &= r - 3pq + 2p^3 - p'' = F_3(-p) - p'' , \\
J_4 &= s - 4pr + 6p^2 q - 3p^4 - p''' - 6p'(q - p^2 - p') - 3(p')^2 \\
&= F_4(-p) - p''' - 6p' J_2 - 3(p')^2 , \\
J_5 &= t - 5ps + 10p^2 r - 10p^3 q + 4p^5 - p'''' - 10p''(q - p^2 - p') - 10p'(r - 3pq + 2p^3 - p'') \\
&\quad -10p'' p' \\
&= F_5(-p) - p'''' - 10p'' J_2 - 10p' J_3 - 10p'' p' , \\
J_6 &= F_6(-p) - p''''' - 15\left\{p''' + 3(p')^2\right\} J_2 - 20p'' J_3 - 15p' J_4 - 15(p')^3 - 10(p'')^2 - 15p''' p' .
\end{aligned}
$$

を定義する．但しここで，$F_n(z) = z^n + \sum_{\ell=1}^n \begin{pmatrix} n \\ \ell \end{pmatrix} P_\ell z^{n-\ell}$ である．$F_2(-p) = -p^2 + q, F_3(-p) = 2p^3 - 3pq + r$，$F_4(-p) = -3p^4 + 6p^2 q - 4pr + s$, $F_5(-p) = 4p^5 - 10p^3 q + 10p^2 r - 5ps + t$, 等々．

- **二階の場合:** L-ODE:$\varphi'' + 2p\varphi' + q\varphi = 0$ に対して，$\mu' - \mu^2 = J_2$.
- **三階の場合:** L-ODE:$\varphi''' + 3p\varphi'' + 3q\varphi' + r\varphi = 0$ に対して，$\mu'' - 3\mu'\mu + \mu^3 + 3\mu J_2 = J_3$.
- **四階の場合:** L-ODE:$\varphi'''' + 4p\varphi''' + 6q\varphi'' + 4r\varphi' + s\varphi = 0$ に対して，$\mu''' - 4\mu''\mu + 6\mu'\mu^2 - 3(\mu')^2 - \mu^4 + 6(\mu' - \mu^2)J_2 + 4\mu J_3 = J_4$.

- **五階の場合:** L-ODE:$\varphi''''' + 5p\varphi'''' + 10q\varphi''' + 10r\varphi'' + 5s\varphi' + t\varphi = 0$ に対して, $\mu'''' - 5\mu'''\mu - 10\mu''\mu' + 10\mu''\mu^2 + 15(\mu')^2\mu - 10\mu'\mu^3 + \mu^5 + 10(\mu'' - 3\mu'\mu + \mu^3)J_2 + 10(\mu' - \mu^2)J_3 + 5\mu J_4 = J_5$.
- **六階の場合:** L-ODE:$\varphi'''''' + 6p\varphi''''' + 15q\varphi'''' + 20r\varphi''' + 15s\varphi'' + 6t\varphi' + u\varphi = 0$ に対して, $\mu''''' - 6\mu'''' - 15\mu'''(\mu' - \mu^2) + 15(\mu')^3 - 10(\mu'')^2 + 60\mu''\mu'\mu - 45\mu'^2\mu^2 - 20\mu''\mu^3 + 15\mu'\mu^4 - \mu^6 + 15\left\{\mu''' - 4\mu''\mu + 6\mu'\mu^2 - 3(\mu')^2 - \mu^4\right\}J_2 + 20\left\{\mu'' - 3\mu'\mu + \mu^3\right\}J_3 + 15\left\{\mu' - \mu^2\right\}J_4 + 6\mu J_5 = J_6$.

などとなる．詳しい考察は省略するが，L-ODE の係数が多項式の場合の，これらの μ の非線型 ODE の多項式解の存在の判定や構成は Ricatti 方程式と同様で，$\deg\mu$ の上限を押えれば，後は μ の決定は未定係数法により連立代数方程式に帰着する．

上記の各例で L-ODE が n 階の場合に，非線型 ODE は μ について $(n-1)$ 階 n 次で，最高次である (μ 及び μ の導函数に関しての)n 次の項は μ^n が唯一なので，ある自然数 N を適切に取ると，$\deg\mu > N$ ならば，左辺の中で μ^n の項の多項式次数が他の項の多項式次数よりも常に大きく，しかも右辺の J_n の次数も常に越えるようできることが容易にわかる．従って μ の多項式解が在ると仮定する際には，$\deg\mu$ の上限 (の一つ) を N と置くことができる．

8 二つの同次正規形 L-ODE が共通解を持つ条件

φ の j 階導函数を $\varphi^{(j)}$ と表す．二つの ℓ 階，m 階の同次正規形の L-ODE をそれぞれ

$$\begin{aligned} L\varphi &= (\textstyle\sum_{j=0}^{\ell} R_j D_x^j)\varphi = \sum_{j=0}^{n} R_j \varphi^{(j)} = 0\,, \\ M\varphi &= (\textstyle\sum_{j=0}^{m} S_j D_x^j)\varphi = \sum_{j=0}^{m} S_j \varphi^{(j)} = 0\,, \end{aligned}$$

とする．さらに係数 R_j, S_j は必要な回数の微分が可能と仮定する．これらが共通解 φ を持つ為の条件を求めるために，L-ODE を i 回微分したものを標準形に展開した際の $\varphi^{(j)}$ の係数を，それぞれ $R_j^{(i)}, S_j^{(i)}$ とする: $D_x^i L\varphi = \sum_{j=0}^{\ell+i} R_j^{(i)}\varphi^{(j)}$, $D_x^i M\varphi = \sum_{j=0}^{m+i} S_j^{(i)}\varphi^{(j)}$.
定義から $R_j^{(0)} = R_j, S_j^{(0)} = S_j$. さらに L, M は正規形なので, 最高階の係数は 1 だから: $R_{\ell+i}^{(i)} \equiv 1$, $i = 0, \cdots, m-1$; $S_{m+j}^{(j)} \equiv 1$, $j = 0, \cdots, \ell - 1$. 共通解を持つ為の条件は:

$$\begin{cases} D_x^j L\varphi = 0, & j = 0, \cdots, m-1\,, \\ D_x^k M\varphi = 0, & k = 0, \cdots, \ell - 1\,. \end{cases}$$

これら $\ell + m$ 個の関係式を，$\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \cdots, \varphi^{(\ell+m-1)}$ の線型連立方程式の形に書くと:

$$\begin{bmatrix} R_{\ell+m-1}^{(m-1)} & R_{\ell+m-2}^{(m-1)} & R_{\ell+m-3}^{(m-1)} & \cdots & \cdots & \cdots & R_0^{(m-1)} \\ 0 & R_{\ell+m-2}^{(m-2)} & R_{\ell+m-3}^{(m-2)} & \cdots & \cdots & \cdots & R_0^{(m-2)} \\ \vdots & 0 & R_{\ell+m-3}^{(m-3)} & \cdots & \cdots & \cdots & R_0^{(m-3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & R_\ell^{(0)} & \cdots & \cdots & R_0^{(0)} \\ S_{\ell+m-1}^{(\ell-1)} & S_{\ell+m-2}^{(\ell-1)} & S_{\ell+m-3}^{(\ell-1)} & \cdots & \cdots & \cdots & S_0^{(\ell-1)} \\ 0 & S_{\ell+m-2}^{(\ell-2)} & S_{\ell+m-3}^{(\ell-2)} & \cdots & \cdots & \cdots & S_0^{(\ell-2)} \\ \vdots & 0 & S_{\ell+m-3}^{(\ell-3)} & \cdots & \cdots & \cdots & S_0^{(\ell-3)} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_m^{(0)} & \cdots & S_0^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^{(\ell+m-1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

非自明な共通解 φ が存在すると係数の行列式は 0 になる．係数行列の階数は互いに線型独立な共通解が複数存在すればそれだけ低下する．これは代数方程式の終結式との類似である．

9 L-OD 作用素間の整除条件

二つの同次 L-OD 作用素の間の整除関係，因子分解と共通解の関係を調べる．

定理 2

いま $\ell > m$ であるとする．L を ℓ 階の同次 L-OD 作用素，M を m 階の同次 L-OD 作用素とする．Q をある同次 L-OD 作用素として，因子分解 $L = QM$ が成り立つなら，方程式 $M\varphi = 0$ の任意の非自明な解は，同時に方程式 $L\varphi = 0$ を満たす共通解になる．逆に $L\varphi = 0$ と $M\varphi = 0$ とが線型独立な共通解を丁度 m 個持つならば，(これは $M\varphi = 0$ の任意の解が $L\varphi = 0$ の解ということでもある) L は M がその右側因子になる分解を持つ．

証明　定理の前半の主張は簡単に示せるから，逆の方の証明を与える．同次 L-OD 作用素 $D_x^{\ell-m}M, \cdots, D_x^2 M,\ D_x M,\ M$ を標準形 (作用素の各項中の D_x の巾を右側に寄せ集めた形) に書いて，函数 $q_{\ell-m}, \cdots, q_2, q_1, q_0$ を係数として同次 L-OD 作用素 L の高階側の係数から消去を行なうと，最後の剰余として高々 $(m-1)$ 階の L-OD 作用素 R が残る．$L - q_{\ell-m}D_x^{\ell-m}M - \cdots - q_1 D_x M - q_0 M = R$．まとめると $L - QM = R$; ここで，$Q \equiv q_{\ell-m}D_x^{\ell-m} + \cdots + q_1 D_x + q_0$．そこで，$L - QM = R$ の左辺を線型独立な m 個の共通解 φ に作用させると 0 になるから，高々 $(m-1)$ 階の L-ODE である $R\varphi = 0$ が m 個の線型独立な解を持つことになり，R が恒等的に 0 でないとすれば R の階数が高々 $(m-1)$ と矛盾するから R は実は恒等的に 0 である．よって因子分解 $L = QM$ が成立する．

∎

定理 3

ℓ_1 階の同次 L-OD 作用素 L_1 と ℓ_2 階の同次 L-OD 作用素 L_2 ($\ell_1 \geq \ell_2$ と仮定して良い) について，L_1 と L_2 を標準形で表し，階数を降下させる除算 (毎回余りの最高階の係数を 1 に規格化しても良い) を用いた「互除法」で求まる「最大公約」作用素を L_g とするとき，同次の L-ODE の $L_1\varphi = 0$ と $L_2\varphi = 0$ とを同時に満たす任意の非自明な共通解 φ は，さらに L-ODE:$L_g\varphi = 0$ の解にもなる．逆に同次 L-ODE:$L_g\varphi = 0$ の任意の非自明な解は，$L_1\varphi = 0, L_2\varphi = 0$ の共通解になる．

証明　L-OD 作用素 L_1, L_2 から始めて「互除法」に於て，$L_1, \cdots, L_g$ を階数が真に減少する L-OD 作用素の列，Q_μ は各段階の作用素同士の割算による商として得られる L-OD 作用素．$\alpha_\nu \neq 0$ は全て 1 に採るか，あるいは L_ν の最高階の係数を 1 とする為の函数とする．

$$\begin{cases} L_1 - Q_1 L_2 & = & \alpha_3 L_3 \neq 0, \\ L_2 - Q_2 L_3 & = & \alpha_4 L_4 \neq 0, \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g-2} - Q_{g-2} L_{g-1} & = & \alpha_g L_g \neq 0, \\ L_{g-1} - Q_{g-1} L_g & = & 0, \end{cases}$$

$L_1\varphi = 0$ と $L_2\varphi = 0$ を同時に満たす非自明な共通解 φ は，$L_\nu\varphi = 0,\ \nu = 3, \cdots, g$ も満たすことはすぐ判る．

逆に，「最大公約」作用素 L_g に対応する方程式 $L_g\varphi = 0$ の任意の非自明な解 φ は，作用素 L_{g-1} に対応する方程式 $L_{g-1}\varphi = 0$ の解になり，作用素の列 $L_{g-2}, \cdots, L_2, L_1$ についても同様であることが判るから，特に $L_1\varphi = 0, L_2\varphi = 0$ の共通解である． ∎

前の定理 (定理 2) から，「互除法」の列に現れる $L_1, L_2, \cdots, L_{g-1}$ は全て L_g を右側の因子に持つ分解を持つことも判る．

10 特解を用いる階数低下法と，非同次方程式の解法

同次 L-ODE:$Ly = 0$ の線型独立な k 個の特解 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ が得られているとする．そのとき，これら特解を基本解に持つ y の同次 k 階 L-ODE は特解に関し対称的で順序に依らない行列式の形で書けることは良く知られている:

$$\det\begin{bmatrix} y & y' & y'' & \cdots & y^{(k)} \\ \varphi_1 & \varphi'_1 & \varphi''_1 & \cdots & \varphi_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_k & \varphi'_k & \varphi''_k & \cdots & \varphi_k^{(k)} \end{bmatrix} = 0\,.$$

この同次 k 階 L-ODE の作用素は，作用素 L の右側因子になる．

他方で，以下の方法によっても k 個の基本解を持つ同次 k 階 L-ODE が構成できる．

- $j = 1$ の時: $\chi_1 \equiv \varphi_1 \neq 0$. $M_1 \equiv D_x - \chi'_1/\chi_1$ を作ると $M_1\chi_1 = 0$ を満たす．一階の L-ODE:$M_1\varphi = 0$ は φ_1 を基本解に持つ．
- $j = 2$ の時: φ_2 は 1 階の L-ODE:$M_1\varphi = 0$ の非自明な解 φ_1 と線型独立だから，$\chi_2 = M_1\varphi_2$ は 0 でない．$M_2 \equiv D_x - \chi'_2/\chi_2$ を作ると $M_2\chi_2 = 0$ を満たす．二階の L-ODE:$M_2M_1\varphi = 0$ は φ_1, φ_2 を基本解に持つ．
- $j > 2$ の時: φ_j は $(j-1)$ 階の L-ODE:$M_{j-1}\cdots M_1\varphi = 0$ の $(j-1)$ 個の線型独立な解 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-1}$ とは線型独立だから，$\chi_j = M_{j-1}\cdots M_1\varphi_j$ は 0 でない．$M_j \equiv D_x - \chi'_j/\chi_j$ を作ると $M_j\chi_j = 0$ を満たす．j 階の L-ODE:$M_jM_{j-1}\cdots M_1\varphi = 0$ は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_j$ を基本解に持つ．

この様にして作られる k 階の作用素 $B \equiv M_kM_{k-1}\cdots M_2M_1$ を持つ L-ODE:$B\varphi = 0$ は条件を満たす．L は B で右側から割切れて，因子分解の形 $L = AB$ を持つ．あるいは，上記の M_1 から始めて M_k までを順に求める過程で，L をその都度 M_j により右側から割れば A を計算できる．まとめると，$B_0 \equiv 1$, $A_0 \equiv L$ から始め，$j = 1, \cdots, k$ まで順に

$$\begin{cases} \chi_j & \Leftarrow \quad B_{j-1}\varphi_j,\ \text{但し}\ B_{j-1} \equiv M_{j-1}\cdots M_2M_1, \\ M_j & \Leftarrow \quad D_x - \chi'_j/\chi_j \\ A_{j-1} & \Rightarrow \quad A_jM_j (\text{丁度}\ M_j \text{によって割り切れる}), \end{cases}$$

$A \equiv A_j, B \equiv B_j$ によって $L = AB = A \cdot M_kM_{k-1}\cdots M_2M_1$ にまで因子分解される．

一階の一般 L-ODE の解の公式から，$M_i \equiv D_x - (\log\chi_i)'$ を用いて積分定数 C を任意として一階 L-ODE:$M_i\phi = \zeta$ の一般解は，$\phi = \chi_i\left(\int \zeta/\chi\, dx + C\right)$ となり，これを作用素の形で $\phi = M_i^{-1}\zeta$ と書くことにする．

非同次の L-ODE:$Ly = r$ は上記の因子分解により $ABy = r$ と書かれる．$\chi = By$ と置けば，$A\chi = r$ の任意の解 χ に対して，非同次 L-ODE:$M_k M_{k-1} \cdots M_2 M_1 y = \chi$ を解けば良く，$y = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{k-1}^{-1} M_k^{-1} \chi$ が元の非同次の L-ODE:$Ly = r$ の解．元の $Ly = r$ より階数が k だけ低い非同次 L-ODE:$A\chi = r$ に問題が帰着できる．

同次 L-ODE:$Ly = 0$ の k 個の線型独立な解 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ が既に得られているとき，新しい線型独立な解 φ を求めようとする場合は，$L\varphi = AB\varphi$ だから，$B\varphi = \chi$ と置くと同次 L-ODE:$A\chi = 0$ の非自明な解 ($\chi \neq 0$) を求めることに帰着する．$B\varphi = \chi \neq 0$ を解いて得られる新たな φ の φ_j，$j = 1, \cdots, k$ からの線型独立性は，$B\varphi_j = 0$，$j = 1, \cdots, k$ であることと，B の線型性からすぐ判る．

11 不変式，半標準形，Laguerre-Forsyth の標準型

二階以上の高階の L-ODE には，それに対応する「不変式」,「半標準型」,「Laguerre-Forsyth の標準型」と呼ばれるものが在る [12],[1](上巻第四章第 58 – 64 節)．n 階の L-ODE は，従属変数の簡単な変換で $(n-1)$ 階の項が欠けた形式にできる．これを元の L-ODE の半標準形といい，従属変数の変換で互いに移り合える L-ODE 同士の半標準型は一致し，従属変数の変換の自由度を除いた比較ができることに成る．二階の正規形 L-ODE の半標準型で残る 0 階の項の係数を元の二階の正規形 L-ODE の「不変式」という．不変式は従属変数の変換で不変に保たれるので，二階の正規形 L-ODE の不変式を比較の手掛かりにすれば，与えられた L-ODE と適合する公式の検索に使える可能性がある．

さらに従属変数の変換に加えて独立変数の変換の自由度までをも許せば，$(n-1)$ 階と $(n-2)$ 階の両方の係数が欠けた形式に変換でき，Laguerre-Forsyth の標準形と呼ばれる [12]．二階の同次 L-ODE の場合は，Laguerre-Forsyth 標準型への変換は，二つの方程式が相互に移り合う為の条件 [1] を与える．これも公式の検索に使える可能性がある．

参考文献

[1] フォーサイス:「微分方程式 (上巻)」第 3 版, 朝倉書店, 1952 年 10 月.
(原著は A.R.Forsyth, "A Treatise on Differential Equations", 6th-ed., Cambridge Univ. Press, 1885(1st ed.)-1928(6th ed.).)

[2] 藤原松三郎:「常微分方程式論」, 岩波書店, 1930 年 7 月.

[3] E.L.Ince, "Ordinary Differential Equations", Dover edition, Dover Pub. Inc.,1956.

[4] 森口, 宇多田, 一松:「数学公式」第一巻 (全三巻), 岩波全書, 岩波書店, 1960 年 3 月.

[5] 犬井鉄郎:「特殊関数」, 岩波全書, 岩波書店, 1962 年 7 月.

[6] 久賀道郎:「ガロアの夢 — 群論と微分方程式」, 日本評論社,1968 年 7 月.

[7] Tosifusa KIMURA(木村俊房):*"Hypergeometric Functions of Two Variables"*, (Lecture Note at Univ. Minnesota, academic year 1971-72), 1973.

[8] 渡辺隼郎:「常微分方程式の 数式処理」, 教育出版, 1974 年 5 月.

[9] 大久保兼二郎:「漸近展開」, 教育出版, 1976 年 2 月.

[10] 渋谷泰隆:「複素領域における線型常微分方程式 — 解析接続の問題 」, 紀伊國屋数学叢書 8, 紀伊國屋書店, 1976 年 9 月.

[11] 一松信:「微分方程式と解法」, 教育出版, 1976 年 11 月.

[12] 森川寿:「不変式論」, 紀伊國屋数学叢書 11, 紀伊國屋書店, 1977 年 12 月.(特に第 6 章)

[13] 福原満洲雄:「常微分方程式」第 2 版, 岩波全書, 1980 年 5 月.

[14] J.J. グレイ, "線形微分方程式と群論", シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002 年 12 月.