数式処理 *J.JSSAC (2005)*
Vol. 11, No. 3,4, pp. 119 - 123

Noda2005 論文

折り紙による角の三等分について

森継 修一*　　菊池 留珠†

筑波大学 図書館情報メディア研究科　　筑波大学 図書館情報専門学群

概　要

We show an algebraic proof of the method for trisecting an arbitrary angle by ORIGAMI. First, we translate the geometrical conditions into polynomial relations among the coordinates of points. Second, we compute a Gröbner basis of the ideal and solve the ideal membership problem. Consequently, the proposition for finding a trisector of a given angel is proved.

1　はじめに

古代ギリシャ以来の三大作図問題のひとつとして，「定木とコンパスのみによる任意の角の三等分」があった．この問題自体については 1837 年に P.L.Wantzel によって作図不可能性が証明されている [8][6] が，一方，折り紙を用いて「紙を折る」という操作を認めると作図が可能になる [1] ことが示されている．

折り紙による作図法は，初等幾何の定理によって容易に証明される [1][6] が，本小論では代数的な計算に帰着させた証明を試みる．幾何の定理の代数的証明としては，Wu の方法が効率的で有用 [2] とされるが，ここでは，グレブナー基底によるイデアルの所属判定問題 [3] に帰着させて計算を行なう．数式処理システムとしては Reduce3.6[4] のグレブナー基底パッケージを使用している．

2　主命題

出典である [1] には，与えられた角に対する 2 本の三等分線まですべて折り紙で作図する方法が示されているが，以下では本質的な部分である「ひとつの三等分点を見つける方法」に限定して命題の形で述べ，代数的計算による証明を与える．幾何学的な条件を座標間の関係式に翻訳する方法は Chou[2] に従うものとする．

命題 1 (折り紙による角の三等分)

$A(0,1), B(0,0), C(1,0), D(1,1)$ を頂点とする正方形の折り紙を用意し，辺 AD 上に任意の点 $E(a,1)$ をとって点 B と結ぶ．このとき $\angle EBC$ を三等分する点が以下の手順で求められる．

*moritsug@slis.tsukuba.ac.jp

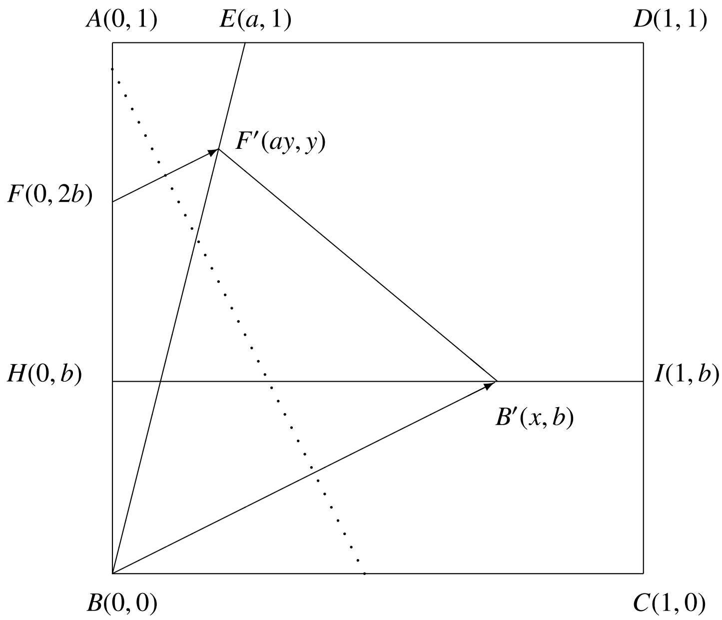
†m275@slis.tsukuba.ac.jp

(i) 辺 AB 上に適当な点 $H(0,b), F(0,2b)$ をとる．（注：あとで紙を折ったときに目的の点が折り紙上にのりさえすれば，b の値のとり方は任意である．）

(ii) 辺 DC 上に点 $I(1,b)$ をとり，点 H と結ぶ．

(iii) 点 F が線分 BE 上に，同時に点 B が線分 HI 上にのるように紙を折る．

(iv) 点 B の写った先を B' とすると，$\angle EBC = 3\angle B'BC$ をみたす．



証明　紙を折った際に点 F の写った先を F' とすると，線分 BE 上にあることから，その座標は y を未知数として (ay,y) と表せる．また点 B' は線分 BI 上にあるので，x を未知数として，その座標を (x,b) とおく．このとき，紙を折ってできた図形の対称性から，四角形 $FBB'F'$ は等脚台形となる．その条件を座標の間の関係式で表す．

(1) $BF = B'F'$ より $(x-ay)^2+(b-y)^2=(2b)^2$ なので，$f_1 := (x-ay)^2+(b-y)^2-(2b)^2$ とおく．

(2) $FF' \parallel BB'$ より $(y-2b)/(ay) = b/x$ なので，$f_2 := (y-2b)x - b(ay)$ とおく．

(3) 角の表現方法は，2 直線の傾きと正接の加法定理を用いることにする．$B'F'$ の傾き $k_1 = (y-b)/(ay-x)$，$B'B$ の傾き $k_2 = (-b)/(-x)$ より

$$\tan\angle F'B'B = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \frac{b(ay-x)-(y-b)x}{(ay-x)x+(y-b)b} = \frac{aby-xy}{axy-x^2+by-b^2}$$

と表される．一方，$\tan\angle FBB' = x/b$ より，$\angle F'B'B = \angle FBB'$ を表す条件式は，$f_3 := (aby - xy)b - (axy - x^2 + by - b^2)x$ で与えられる．

(4) $I = (f_1, f_2, f_3)$ を $\mathbf{Q}(a,b)[x,y]$ のイデアルとみて，$y > x$ の辞書式順序でグレブナー基底を計算すると次を得る．

$$G = \left\{(a^2b + b)y - x^2 + (2ab)x + b^2, \quad x^3 - (3ab)x^2 - (3b^2)x + ab^3\right\}$$

(5) 証明すべき条件 $\angle EBC = 3\angle B'BC$ を表すには，正接に関する 3 倍角の公式

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

を用いる．$\tan\theta = \tan\angle B'BC = b/x, \quad \tan 3\theta = \tan\angle EBC = 1/a$ を代入して

$$\frac{1}{a} = \frac{3bx^2 - b^3}{x^3 - 3b^2x}$$

を得るので，$p := (x^3 - 3b^2x) - (3bx^2 - b^3)a$ とおけばよい．

(6) この条件式 p は，先に求めたグレブナー基底 G の第 2 式に等しくなり，$p \in I$ であることが分かる．すなわち，命題に述べた手順で求めた点 $B'(x,b)$ は任意に与えられた $\angle EBC$ を三等分することが確かめられた．

∎

注意 2

計算によって確かめるべきことは $p \in I = (f_1, f_2, f_3)$ であって $p \in G$ ではない．したがって，グレブナー基底 G を計算する際の単項式順序は任意であり，実際，辞書式以外の順序の下でも p は G によって 0 に簡約される．

3 Chou の例題に対する計算結果

本小論は，著者のひとりの卒業研究 [7] の応用である．そこでは，Wu の方法を用いて証明された Chou の結果 [2] に対し，以下の環境を用いて，グレブナー基底の方法でどこまで計算できるかを調べた．

機種／ OS	H9000L2000 ／ HP-UX11.0
CPU	PA-8500 (440MHz)
使用メモリ	64MByte
数式処理システム	Reduce3.6

その結果，1988 年の時点でグレブナー基底の方法では 4 時間かけても計算できなかった 35 の例題のうち 19 題について証明に成功した．なお，Chou の結果は Symbolics 3600 で実行されたものであるが，グレブナー基底計算の実装の詳細は不明である．残りは，メモリ不足に陥ったものが 8 題，100 分で終了せず計算を打ち切ったものが 8 題である（表 1）．

幾何の定理を多項式表現に翻訳すると，パラメータ u_i と変数 x_i の間の関係式が得られ，一般的には $\mathbf{Q}(u_1, \ldots, u_s)[x_1, \ldots, x_t]$ におけるグレブナー基底計算が必要である．ところが「パラ

表 1: Chou による未解決問題に対する計算時間

	$\#x_i$	$\#u_i$	$\#h_i$	$\#g_i$	time(sec)
ex6	12	10	12	1	∗
ex7	12	11	12	1	∗
ex8	11	8	13	1	15.44
ex10	20	6	23	1	∗
ex11	20	6	23	1	∗
ex12	20	6	23	1	–
ex13	17	6	19	1	–
ex14	17	6	19	1	–
ex19	17	6	19	1	∗
ex21	11	4	12	1	30.74
ex26	13	7	14	1	11.57
ex40	15	3	15	1	–
ex45	14	3	14	1	2.38
ex48	10	6	11	1	∗
ex63	15	6	19	1	0.57
ex64	13	4	17	1	9.16
ex80	14	5	16	1	–
ex94	7	3	8	1	910.43
ex96	7	4	7	1	2843.44
ex99	10	4	13	2	∗
ex106	8	4	9	1	69.14
ex109	7	6	11	1	• 2.08
ex115	8	3	10	1	• 229.89
ex240	10	3	10	2	• 2.88
ex310	14	5	16	1	–
ex311	13	2	17	1	19.94
ex315	20	4	23	1	–
ex316	24	4	31	1	∗
ex367	14	5	18	1	74.62
ex379	9	4	11	1	2.55
ex395	5	3	6	1	0.50
ex396	14	5	16	1	–
ex401	7	6	9	1	24.39
ex492	17	3	18	1	8.25
ex507	8	7	8	1	24.55

x_i 条件式中の変数
u_i 条件式中のパラメータ
h_i 仮定を表す条件式
g_i 結論を表す条件式

∗ メモリ不足で計算不能
– 100 分で計算終了せず
• イデアルの分解を人手で追加して証明

メータ u_i の有理式からなる係数」の扱いについては，実装の違いにより効率が大きく変化する．同じ Reduce でも Version3.7[5] のグレブナー基底パッケージでは，有理式の分母を払って $\mathbf{Q}[u_1,\ldots,u_s][x_1,\ldots,x_t]$ に式変形して計算を進める設計になっているため，$\mathbf{Q}[u_1,\ldots,u_s]$ に属する係数部分が爆発的に成長し，計算効率が極端に悪くなる．一方，Version3.6 では，$\mathbf{Q}(u_1,\ldots,u_s)$ における約分を強制的に実行させることにより有理式係数が簡単化され，Version3.7 に比べて計算時間が大幅に短縮される．そのため今回は，あえて旧版である Version3.6 を使用した．今後は他の数式処理システムでの実行効率も調べる必要があると考えている．

4 おわりに

本小論では，「折り紙による角の三等分」の方法に対し，代数的な証明を与えて追試を行なった．この方法は，従来の折り紙では使われていない技法（著者 [1] は「三次元折り」と命名している）を導入することにより，定木とコンパスだけでは作図できない問題を解決してしまった点で非常にユニークである．さらに，この「三次元折り」による「立方体倍積問題」の解法も示されている．今後の研究課題としては，折り紙の各技法が持つ数学的意味を，座標間の代数的関係に対する数式処理という視点で追求していく方向が考えられる．

参 考 文 献

[1] 阿部恒: すごいぞ折り紙 – 折り紙の発想で幾何を楽しむ, 日本評論社, 東京, 2003. (初出：“数学セミナー” 1980 年 7 月号表紙).

[2] Chou, S.-C.: *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D.Reidel, Dordrecht, 1988.

[3] Cox, D., Little, J., and O’Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms (2nd ed.)*, Springer, N.Y., 1997. (邦訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 2000).

[4] Hearn, A. C.: *Reduce User’s Manual (Ver. 3.6)*, RAND Corp., Santa Monica, 1995.

[5] Hearn, A. C.: *Reduce User’s Manual (Ver. 3.7)*, RAND Corp., Santa Monica, 1999.

[6] 川崎徹郎: 角の三等分の作図不可能性, 数学セミナー, **43**(12), 2004, 36–39.

[7] 菊池留珠: 数式処理を用いた Euclid 幾何の定理証明プログラムの作成, 卒業論文, 筑波大学図書館情報専門学群, 2005.

[8] 佐々木元太郎: ユークリッド幾何, 現代数学レクチャーズ A-5, 培風館, 東京, 1979.